2010年全国硕士研究生入学统一考试 数学试题及参考答案

数学(一)试题

一、选择题:第1~8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合试题要求.

(1) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$

(A) 1. (B) e.

(C) e^{a-b}. (D) e^{b-a}.

(2) 设函数$z=z(x,y)$由方程$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$确定,其中$F$为可微函数,且$F'_2\neq0$,则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x. (B) z.

(C) $-x$. (D) $-z$.

(3) 设m,n均是正整数,则反常积分$\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$的收敛性

(A) 仅与m的取值有关. (B) 仅与n的取值有关.

(C) 与m,n的取值都有关. (D) 与m,n的取值都无关.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$.

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$.

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则

(A) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$. (B) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(C) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$. (D) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1, \\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$

(A) 0. (B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$. (D) $1-e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度,$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度,若

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leqslant 0, \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases}(a>0,b>0)$$

为概率密度,则 a,b 应满足

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.

(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.

二、填空题:第 9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 设 $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)\,du, \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$______.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx=$______.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|$ $(x\in[-1,1])$,起点是$(-1,0)$,终点为$(1,0)$,则曲线积分 $\int_L xy\,dx+x^2\,dy=$______.

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$,则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$______.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^T$. 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2,则 $a=$______.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}$, $k=0,1,2,\cdots$,则 $EX^2=$______.

三、解答题:第 15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\,dt$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

（Ⅰ）比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

（Ⅱ）记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

（18）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

（19）（本题满分 10 分）

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

（20）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解，

（Ⅰ）求 λ,a；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

（21）（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

（Ⅱ）证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23)(本题满分 11 分).

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数($i=1,2,3$). 试求常数 a_1,a_2,a_3,使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量,并求 T 的方差.

数学(一)试题参考答案

一、选择题

(1) C (2)B (3) D (4) D (5) A (6) D

(7) C (8) A

二、填空题

(9) 0 (10) -4π (11) 0 (12) $\frac{2}{3}$ (13) 6

(14) 2

三、解答题

(15) **解** 对应齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的两个特征根为 $r_1=1,r_2=2$,其通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

设原方程的特解形式为 $y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x$,则

$$(y^*)'=[ax^2+(2a+b)x+b]\mathrm{e}^x,$$

$$(y^*)''=[ax^2+(4a+b)x+2a+2b]\mathrm{e}^x,$$

代入原方程解得 $a=-1,b=-2$,故所求通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-x(x+2)\mathrm{e}^x.$$

(16) **解** $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,由于

$$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt,$$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}$$

$$=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt,$$

所以$f(x)$的驻点为$x=0,\pm1$.

列表讨论如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

因此,$f(x)$的单调增加区间为$(-1,0)$及$(1,+\infty)$,单调减少区间为$(-\infty,-1)$及$(0,1)$;极小值为$f(\pm1)=0$,极大值为$f(0)=\int_0^1te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

(17) **解** (Ⅰ)当$0\leqslant t\leqslant1$时,因为$\ln(1+t)\leqslant t$,所以

$$|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|,$$

因此
$$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt\leqslant\int_0^1t^n|\ln t|dt.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知$0\leqslant u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt\leqslant\int_0^1t^n|\ln t|dt.$

因为
$$\int_0^1t^n|\ln t|dt=-\int_0^1t^n\ln t\,dt=\frac{1}{n+1}\int_0^1t^ndt=\frac{1}{(n+1)^2},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1t^n|\ln t|dt=0,$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

(18) **解** 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$,由于

所以

$$I=\iint\limits_D \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D (x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\pi.$$

(20) **解** (Ⅰ) 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 2 个不同的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解，故

$$|\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

于是 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=1$ 时，因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，舍去.

当 $\lambda=-1$ 时，对 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵施以初等行变换：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&a+2\end{array}\right)=\boldsymbol{B},$$

因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，所以 $a=-2$.

(Ⅱ) 当 $\lambda=-1,a=-2$ 时，

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

(21) **解** (Ⅰ) 由题设，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,0，且 $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的一个特征向量.

设 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量，因为 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量正交，所以 $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0$，即 $x_1+x_3=0$. 取 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的两个正交的单位特征向量.

令
$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

则有
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix},$$

故
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,0，于是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 2,2,1，又 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

(22) **解** 因
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2-x^2}\,\mathrm{d}y=A\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=A\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-x^2},\quad -\infty<x<+\infty,$$

所以
$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,\mathrm{d}x=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=A\pi,$$

从而 $A=\dfrac{1}{\pi}$.

当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<y<+\infty.$$

(23) 解　记 $p_1=1-\theta,p_2=\theta-\theta^2,p_3=\theta^2$. 由于 $N_i\sim B(n,p_i),i=1,2,3$,故 $EN_i=np_i$,于是

$$ET=a_1EN_1+a_2EN_2+a_3EN_3=n[a_1(1-\theta)+a_2(\theta-\theta^2)+a_3\theta^2].$$

为使 T 是 θ 的无偏估计量,必有

$$n[a_1(1-\theta)+a_2(\theta-\theta^2)+a_3\theta^2]=\theta,$$

因此
$$\begin{cases}a_1=0,\\ a_2-a_1=\dfrac{1}{n},\\ a_3-a_2=0,\end{cases}$$

由此得
$$a_1=0,\ a_2=a_3=\frac{1}{n}.$$

由于 $N_1+N_2+N_3=n$,故

$$T=\frac{1}{n}(N_2+N_3)=\frac{1}{n}(n-N_1)=1-\frac{N_1}{n}.$$

注意到 $N_1\sim B(n,1-\theta)$,故

$$DT=\frac{1}{n^2}DN_1=\frac{n(1-\theta)\theta}{n^2}=\frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$