8.1小挠度薄板弯曲的有限元法

小挠度薄板的弯曲问题，简单情况（规则的荷载，简单边界条件）下的解答可用本章前述的解析法或后面将要提到的能量法求得，并且目前已有不少现成的结果可用。然而在实际工程中，板的弯曲问题往往比较复杂（不规则分布的荷载、复杂边界条件、变厚度或具有开孔的板），这时用有限元法就显得十分方便。下面就来研究小挠度薄板弯曲的有限元法。

本章仅讨论矩形小挠度薄板单元的情况。

8.1.1节点位移与节点力

在梁弯曲问题中，节点的位移分量是挠度 v 和转角θ。将梁的弯曲进行推广，板弯曲中节点的位移分量应是挠度 w 及绕 x、y 轴的转角θ_x、θ_y，即

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \tag{0.1}$$

在有限元法中，规定节点位移矢量的正方向与坐标轴的正方向相同：挠度与 z 轴一致时为正；转角正方向按右手螺旋法则确定，如图 8．1 所示的方向均为正。

根据转角的几何定义（与第 2 章单跨梁转角的定义类似），式(0.1)可写为

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ -\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix} \tag{0.2}$$

矩形薄板单元有 4 个节点：i、j、m、n，它们沿逆时针排列（图 8．1)。单元的边长为 a 及 b，厚度为 t。整个单元的位移列阵为

$$\{\delta^e\}_{12\times1} = \begin{bmatrix} \delta_i^T & \delta_j^T & \delta_m^T & \delta_n^T \end{bmatrix}^T \tag{0.3}$$

其中$\{\delta_i\}$如式(0.2)所示。

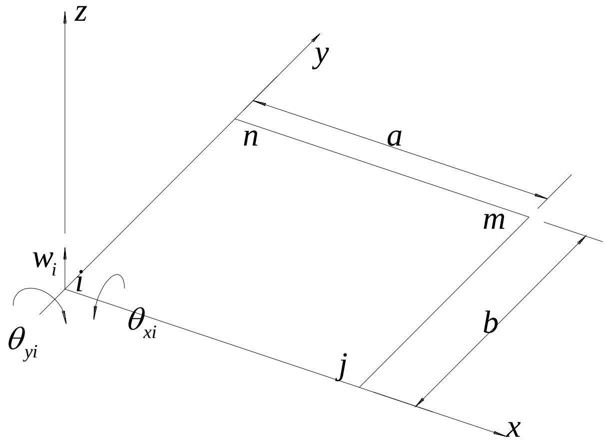

图 8．1 矩形小挠度薄板单元

与之相应的单元节点力为

$$\left\{F^{e}\right\}_{12\times1}=\left[F_i^T \quad F_j^T \quad F_m^T \quad F_n^T\right]^T \tag{0.4}$$

式中

$$\left\{F_k\right\}=\begin{Bmatrix} F_{zk} \\ M_{xk} \\ M_{yk} \end{Bmatrix} \quad (k=i,\ j,\ m,\ n) \tag{0.5}$$

8.1.2位移模式

小挠度矩形薄板单元有 4 个节点，12 个节点位移分量。仅取挠度为独立位移分量，其表达式应含有 12 个待定系数。根据选取位移函数的原则，设

$$\begin{aligned} w(x,y)&=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4x^2+\alpha_5xy+\alpha_6y^2 \\ &+\alpha_7x^3+\alpha_8x^2y+\alpha_9xy^2+\alpha_{10}y^3+\alpha_{11}x^3y+\alpha_{12}xy^3 \end{aligned} \tag{0.6}$$

于是

$$w=[H]\{\alpha\} \tag{0.7}$$

式中

$$[H]=\left[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3\right]$$

$$\{\alpha\}=\left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \ldots \quad \alpha_{12}\right]^T$$

根据(0.2)

$$\theta_x=\frac{\partial w}{\partial y}=\alpha_3+\alpha_5x+2\alpha_6y+\alpha_8x^2+2\alpha_9xy+3\alpha_{10}y^2+\alpha_{11}x^3+3\alpha_{12}xy^2 \tag{0.8}$$

$$\theta_y=-\frac{\partial w}{\partial x}=-\left(\alpha_2+2\alpha_4x+\alpha_5y+3\alpha_7x^2+2\alpha_8xy+\alpha_9y^2+3\alpha_{11}x^2y+\alpha_{12}y^3\right) \tag{0.9}$$

这样就可以将矩形薄板内任意点(x_i,y_i)的位移$\left\{\delta_i\right\}=\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ -\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix}$表达成 x_i、y_i 的函数

$$\left\{\delta_i\right\}=\left[A_i\right]\left\{\alpha\right\} \tag{0.10}$$

式中

$$\left[A_i\right]=\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 & 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & -3x_i^2 & -2x_i y_i & -y_i^2 & 0 & -3x_i^2 y_i & -y_i^3 \end{bmatrix} \tag{0.11}$$

同理，将矩形薄板节点的 12 个自由度表达成 x、y 的函数

$$\left\{\delta^e\right\}_{12\times1}=\left[A\right]_{12\times12}\left\{\alpha\right\}_{12\times1} \tag{0.12}$$

其中：

$$\left[A\right]=\begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_m \\ A_n \end{bmatrix} \tag{0.13}$$

将单元的四个节点坐标$i\left(0,0\right)$， $j\left(a,0\right)$， $m\left(a,b\right)$， $n\left(0,b\right)$代入式(0.13)中可得

$$\left[A\right]=\left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & 0 & 0 & -3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & -b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \\ \hdashline 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -b^2 & 0 & 0 & -b^3 \end{array}\right]$$

可以求得$[A]$的逆阵$[A]^{-1}$如下：

$$[A]^{-1}=$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{a^2} & 0 & \frac{2}{a} & \frac{3}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{ab} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{ab} & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{b} \\
-\frac{3}{b^2} & -\frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{b^2} & -\frac{1}{b} & 0 \\
\frac{2}{a^3} & 0 & -\frac{1}{a^2} & -\frac{2}{a^3} & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{a^2b} & 0 & -\frac{2}{ab} & -\frac{3}{a^2b} & 0 & -\frac{1}{ab} & \frac{3}{a^2b} & 0 & \frac{1}{ab} & -\frac{3}{a^2b} & 0 & \frac{2}{ab} \\
\frac{3}{ab^2} & \frac{2}{ab} & 0 & -\frac{3}{ab^2} & -\frac{2}{ab} & 0 & \frac{3}{ab^2} & -\frac{1}{ab} & 0 & -\frac{3}{ab^2} & \frac{1}{ab} & 0 \\
\frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} & 0 \\
-\frac{2}{a^3b} & 0 & \frac{1}{a^2b} & \frac{2}{a^3b} & 0 & \frac{1}{a^2b} & -\frac{2}{a^3b} & 0 & -\frac{1}{a^2b} & \frac{2}{a^3b} & 0 & -\frac{1}{a^2b} \\
-\frac{2}{ab^3} & -\frac{1}{ab^2} & 0 & \frac{2}{ab^3} & \frac{1}{ab^2} & 0 & -\frac{2}{ab^3} & \frac{1}{ab^2} & 0 & \frac{2}{ab^3} & -\frac{1}{ab^2} & 0
\end{bmatrix}$$

根据(0.12)，有

$$\{\alpha\}=[A]^{-1}\{\delta^e\} \tag{0.14}$$

将(0.14)代入(0.7)

$$w=[H][A]^{-1}\{\delta^e\}=[N]_{1\times12}[\delta^e]_{12\times1} \tag{0.15}$$

式中$[N]$为位移矩阵。

$$[N]_{1\times12}=[H][A]^{-1} \tag{0.16}$$

展开得（为了便于观察，下面将$[N]$转置成列向量的形式）

$$
[N]^T = \begin{bmatrix} -(\xi-1)(\eta-1)\left(2\xi^2+2\eta^2-\xi-\eta-1\right) \\ -b\eta(\xi-1)(\eta-1)^2 \\ a\xi(\xi-1)^2(\eta-1) \\ \hdashline \xi(\eta-1)\left(2\xi^2+2\eta^2-3\xi-\eta\right) \\ b\xi\eta(\eta-1)^2 \\ a\xi^2(\xi-1)(\eta-1) \\ \hdashline -\xi\eta\left(2\xi^2+2\eta^2-3\xi-3\eta+1\right) \\ b\xi\eta^2(\eta-1) \\ -a\xi^2\eta(\xi-1) \\ \hdashline \eta(\xi-1)\left(2\xi^2+2\eta^2-\xi-3\eta\right) \\ -b\eta^2(\xi-1)(\eta-1) \\ -a\xi\eta(\xi-1)^2 \end{bmatrix} \tag{0.17}
$$

式中：

$$
\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a} \\ \eta &= \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \tag{0.18}
$$

小挠度薄板矩形单元所选择的位移函数(0.6)可以满足完备条件，因为 $w(x,y)$中包含有全二次多项式，所以可以包括板单元在 z 方向的刚性位移（常数项）及绕 x 和 y 方向的刚性转动（一次项）及常曲率项（二次项）。但它只能部分满足位移协调条件，即仅能满足位移 w 和切向导数 $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ 协调而不能满足边界上的法向导数 $\dfrac{\partial w}{\partial n}$ 协调。

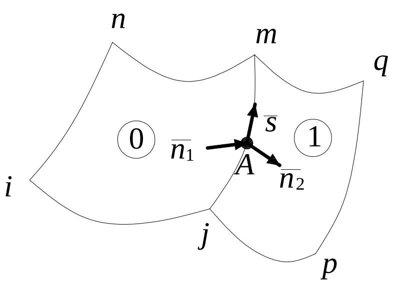

图 8.2 两个相邻单元在公共边界 jm 上的部分协调性

如图 8.2 所示，A 为两个相邻单元 0、1 在公共边界 jm 上的任意一点。两个单元在 A 点的垂向位移 w 是相等（协调）的，另外在 A 点的切向导数所指方向 $\bar{s}$ 也是相等（协调）的。而两个单元在 A 点的法向导数所指方向 $\bar{n}_1$ 和 $\bar{n}_2$ 却是不同的。

如图 8．1 所示，以 jm 边为例来证明这种“ 部分协调性 ”。

（1） jm 边界上位移 w 的连续性证明

在 jm 边上，将 x=a 代入(0.15)得 jm 边上薄板挠度方程为

$$
\begin{aligned}
(w)_{jm} &= \left(1-\frac{3y^2}{b^2}+\frac{2y^3}{b^3}\right)w_j+\left(y-\frac{2y^2}{b}+\frac{y^3}{b^2}\right)\theta_{xj} \\
&+\left(3\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y^3}{b^3}\right)w_m+\left(-\frac{y^2}{b}+\frac{y^3}{b^2}\right)\theta_{xm}
\end{aligned} \tag{0.19}
$$

由上式可知，$(w)_{jm}$ 可以由 j 节点和 m 节点的挠度 w 和转角 θ_x 唯一确定。两个单元共用 j、m 节点，它们在 j 节点和 m 节点的挠度 w 和转角 θ_x 分别相等。因此，根据(0.19)可以判定这两个单元在公共边 jm 上任意一点的挠度是连续的。

（2）jm 边界上切向导数 $\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial y}$ 的连续性证明

考虑到(0.15)，在 jm 边上，将 $x=a$ 代入 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 得 jm 边上切向导数为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial y} &= \left(-\frac{6y}{b^2}+\frac{6y^2}{b^3}\right)w_j+\left(1-\frac{4y}{b}+\frac{3y^2}{b^2}\right)\theta_{xj} \\
&+\left(6\frac{y}{b^2}-\frac{6y^2}{b^3}\right)w_m+\left(-2\frac{y}{b}+\frac{3y^2}{b^2}\right)\theta_{xm}
\end{aligned} \tag{0.20}
$$

由上式可知，$\frac{\partial w}{\partial y}$ 可以由 j 节点和 m 节点的挠度 w 和转角 θ_x 唯一确定。两个单元共用 j、m 节点，它们在 j 节点和 m 节点的挠度 w 和转角 θ_x 分别相等。因此，根据(0.20)可以判定这两个单元在公共边 jm 上的切向导数是连续的。

（3）jm 边界上法向导数 $\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\partial w}{\partial x}$ 的不连续性证明

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \left(-\frac{y}{ab}+\frac{3y^2}{ab^2}-\frac{2y^3}{ab^3}\right)w_i+\left(-\frac{y}{a}+\frac{2y^2}{ab}-\frac{y^3}{ab^2}\right)\theta_{xi} \\
&+\left(\frac{y}{ab}-\frac{3y^2}{ab^2}+\frac{2y^3}{ab^3}\right)w_j+\left(\frac{y}{a}-\frac{2y^2}{ab}+\frac{y^3}{ab^2}\right)\theta_{xj}+\left(-1+\frac{y}{b}\right)\theta_{yj} \\
&+\left(-\frac{y}{ab}+\frac{3y^2}{ab^2}-\frac{2y^3}{ab^3}\right)w_m+\left(-\frac{y^2}{ab}+\frac{y^3}{ab^2}\right)\theta_{xm}-\frac{y}{b}\theta_{ym} \\
&+\left(\frac{y}{ab}-\frac{3y^2}{ab^2}+\frac{2y^3}{ab^3}\right)w_n+\left(\frac{y^2}{ab}-\frac{y^3}{ab^2}\right)\theta_{xn}
\end{aligned} \tag{0.21}
$$

由上式可知，$\frac{\partial w}{\partial x}$ 需要由 i,j,m,n 4 个节点的相关位移来确定。但相邻单元只在公共的 j、m 节点上位移相等，其它节点的位移则不相同。因此，根据(0.21)可以判定这两个单元在公共边 jm 上的法向导数是不连续的。

尽管本章的小挠度薄板矩形单元为非协调单元，但是正如第 7 章中所指出，实际计算表明，当单元逐步取小时非协调元还是能够收敛到精确结果的。

8.1.3单元应变与应力

将(0.15)代入“ 形变分量 ”公式**错误！未找到引用源。**，得

$$\{\chi\}=[B]\{\delta^e\} \tag{0.22}$$

式中$[B]$为几何矩阵。

下面讨论如何求$[B]$。假设$[N]=[n_1, n_2, n_3, \cdots, n_i, \cdots, n_{12}]$，$[\delta^e]=[d_1\ d_2\ d_3 \cdots d_i, \cdots, d_{12}]^T$。则根据(0.15)

$$w=\sum_{i=1}^{12} n_i d_i \tag{0.23}$$

分析(0.17)和(0.18)，可知其中 n_i（i=1,2,⋯,12）为 x,y 的函数，而 d_i（i=1,2,⋯,12）为单元节点 12 个自由度对应的位移，可以理解为常数。于是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\sum\limits_{i=1}^{12} d_i \dfrac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\sum\limits_{i=1}^{12} d_i \dfrac{\partial^2 n_i}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}=\sum\limits_{i=1}^{12} d_i \dfrac{\partial^2 n_i}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{0.24}$$

因此，可以得到

$$[B]_{3\times 12} = -\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} \frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_3}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_4}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_5}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_6}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_7}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_8}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_9}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_{10}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_{11}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 n_{12}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 n_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_3}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_4}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_5}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_6}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_7}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_8}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_9}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_{10}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_{11}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 n_{12}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 n_1}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_2}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_3}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_4}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_5}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_6}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_7}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_8}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_9}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_{10}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_{11}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 n_{12}}{\partial x \partial y} \end{array}\right] \quad (0.25)$$

将(0.17)、(0.18)代入上式并展开得（为了便于观察，将$[B]$以转置的形式写出）：

$[B]^T =$

$$
\left[\begin{array}{lll}
\frac{6(2\xi-1)(\eta-1)}{a^2} & \frac{6(\xi-1)(2\eta-1)}{b^2} & 2\frac{6\xi^2+6\eta^2-6\xi-6\eta+1}{ab} \\
0 & \frac{2(\xi-1)(3\eta-2)}{b} & 2\frac{(3\eta-1)(\eta-1)}{a} \\
-\frac{2(3\xi-2)(\eta-1)}{a} & 0 & -2\frac{(3\xi-1)(\xi-1)}{b} \\
\hdashline
-\frac{6(2\xi-1)(\eta-1)}{a^2} & -\frac{6\xi(2\eta-1)}{b^2} & -2\frac{6\xi^2+6\eta^2-6\xi-6\eta+1}{ab} \\
0 & -\frac{2\xi(3\eta-2)}{b} & -2\frac{(3\eta-1)(\eta-1)}{a} \\
-\frac{2(3\xi-1)(\eta-1)}{a} & 0 & -2\frac{\xi(3\xi-2)}{b} \\
\hdashline
\frac{6(2\xi-1)\eta}{a^2} & \frac{6\xi(2\eta-1)}{b^2} & 2\frac{6\xi^2+6\eta^2-6\xi-6\eta+1}{ab} \\
0 & -\frac{2\xi(3\eta-1)}{b} & -2\frac{\eta(3\eta-2)}{a} \\
\frac{2(3\xi-1)\eta}{a} & 0 & 2\frac{\xi(3\xi-2)}{b} \\
\hdashline
-6\frac{(2\xi-1)\eta}{a^2} & -\frac{6(\xi-1)(2\eta-1)}{b^2} & -2\frac{6\xi^2+6\eta^2-6\xi-6\eta+1}{ab} \\
0 & \frac{2(\xi-1)(3\eta-1)}{b} & 2\frac{\eta(3\eta-2)}{a} \\
\frac{2(3\xi-2)\eta}{a} & 0 & 2\frac{(3\xi-1)(\xi-1)}{b}
\end{array}\right] \tag{0.26}
$$

其中

$$
\left.\begin{array}{l}
\xi=\frac{x}{a} \\
\eta=\frac{y}{b}
\end{array}\right\}
$$

有了$[\chi]$，可由式错误！未找到引用源。求出板单元各节点的内力：弯矩M_x，M_y与扭矩M_{xy}

$$\{M\}_{3\times1}=[D][B]\{\delta^e\}=[S]_{3\times12}\{\delta^e\}_{12\times1} \tag{0.27}$$

式中$[D]$为弹性矩阵，在式错误！未找到引用源。中已经进行了定义。

$[S]_{3\times12}$为内力矩阵：

$$[S]_{3\times12}=[D][B] \tag{0.28}$$