试证明：$\int_c^x \int_c^x \cdots \int_c^x f(x)dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_c^x f(\xi)(x-\xi)^{n-1}d\xi$

证明：令 $F(x)=\int_c^x f(\xi)d\xi$，并注意到：

1) 则 $F'(x)=f(x)$， $d(F(x))=F'(x)dx=f(x)dx$

2) $F(c)=\int_c^c f(\xi)d\xi=0$

下面用数学归纳法来证：

当 n=1 时，原命题易证。

假设 n 时，等式成立，则左右两边 n=n+1 时

右边=

$$=\frac{1}{n!}\int_c^x f(\xi)(x-\xi)^n d\xi=\frac{1}{n!}\int_c^x (x-\xi)^n dF(\xi)$$

$$=\frac{1}{n!}\left((x-\xi)^n F(\xi)|_c^x-\int_c^x F(\xi)d(x-\xi)^n\right)$$

$$=\frac{1}{n!}\left(0+n\int_c^x F(\xi)(x-\xi)^{n-1}d\xi\right)$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_c^x F(\xi)(x-\xi)^{n-1}d\xi$$

$$=\int_c^x \int_c^x \cdots \int_c^x F(x)dx^n$$

$$=\int_c^x \int_c^x \cdots \int_c^x \int_c^x f(x)dx^n$$

=左边

至此，命题得证。

一个例子

对于 $\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x f(x)dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(\xi)(x-\xi)^{n-1}d\xi$

当 n=2，$f(x)$=$\sin x$。原命题变为：

$\int_0^x \int_0^x \sin x dx dx=\int_0^x \sin\xi(x-\xi)d\xi$ （a）

（a）式左边=$x-\sin x$

（a）式右边=$\int_0^x (x\sin\xi-\xi\sin\xi)d\xi$

$$=\int_0^x x\sin\xi d\xi-\int_0^x \xi\sin\xi d\xi$$

$$=-x\cos\xi|_0^x+\int_0^x \xi d(\cos\xi)$$

$$=-x\cos x+x+\int_0^x \xi(d\cos\xi)$$

$$=-x\cos x+x+\xi\cos\xi|_0^x-\int_0^x \cos\xi d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= -x\cos x + x + x\cos x - \int_0^x \cos\xi d\xi \\
&= -x\cos x + x + x\cos x - \sin x \\
&= x - \sin x
\end{aligned}
$$