第五章 有旋流动和有势流动

- 从运动学的角度对有旋流动的流场作进一步的讨论和分析。
- 从动力学的角度介绍在质量力有势，流体为理想不可压缩的条件下，有关涡通量的保持性定理。
- 论述势流理论的基本内容，引出不可压缩流体平面流动的流函数概念，重点讨论不可压缩流体平面无旋流动的速度势函数与流函数的关系以及求解势流问题的奇点叠加方法。

第五章 有旋流动和有势流动

§5—1 有旋流动的运动学性质

§5—2 理想不可压缩流体的旋涡动力学特性

§5—3 兰肯涡和卡门涡街

§5—4 有势流动及解法概述

§5—5 理想不可压缩流体恒定平面势流的奇点分布解法

§5—1 有旋流动的运动学性质

- 有旋流动和无旋流动的判别

这个分类是很重要的

旋度 $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ？

✓ 无旋流动

✗ 有旋流动

判别的唯一标准是看流速场的旋度是否为零

• 涡量、涡线、涡管和涡通量

涡量

对于有旋流动，将流速场的旋度称为涡量，它是流体微团旋转角速度矢量的两倍。涡量场是矢量场。

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 2\boldsymbol{\omega}$$

涡线

涡线是涡量场的矢量线，是某瞬时对应的流场中的曲线，该瞬时位于涡线上各点对应的涡量都沿着涡线的切向。与流线一样，涡线是与欧拉观点相对应的概念。

涡线微分方程

根据定义，涡线的微分方程为

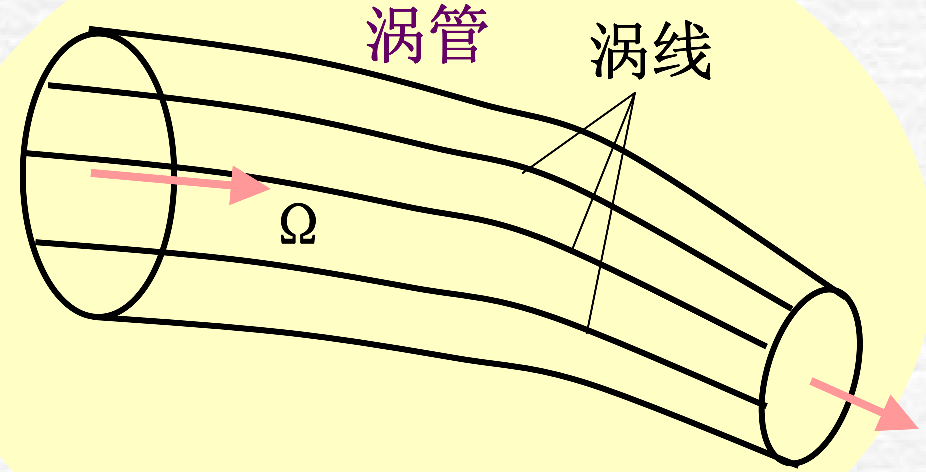
$$\boldsymbol{\Omega}\times \mathrm{d}\mathbf{l}=0 \qquad \text{其中} \qquad \mathrm{d}\mathbf{l}=\mathrm{d}x\mathbf{i}+\mathrm{d}y\mathbf{j}+\mathrm{d}z\mathbf{k}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\Omega_x(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{\Omega_y(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{\Omega_z(x,y,z,t)}$$

实际上这是两个微分方程，其中 t 是参数。可求解得到两族曲面，它们的交线就是涡线族。

涡管

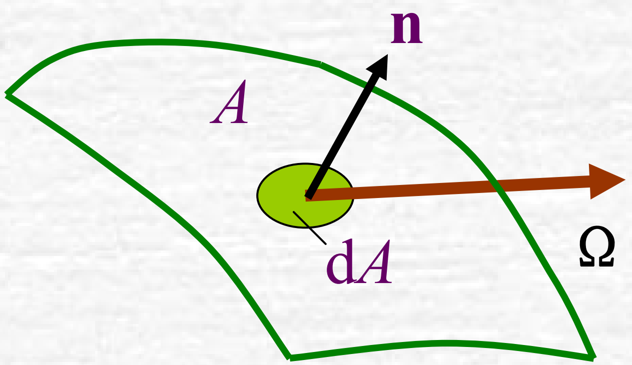
在流场中，取一条不与涡线重合的封闭曲线 L，在同一时刻过 L上每一点作涡线，由这些涡线围成的管状曲面称为涡管。



与涡线一样，涡管是瞬时概念

涡通量

通过流场中某曲面 A 的涡量通量 $\iint_A \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A$ 称为涡通量。

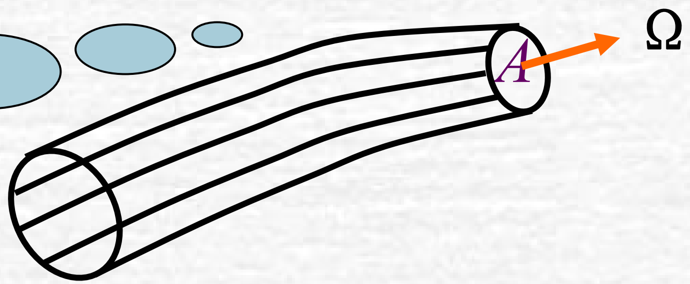


涡管强度

通过涡管任一截面 A 的涡通量又可称为涡管强度

$$I=\iint_A \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A=\iint_A(\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A=\iint_A 2\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A$$

留下一个问题：为什么可取任一截面计算涡管强度



• 速度环量、斯托克斯定理

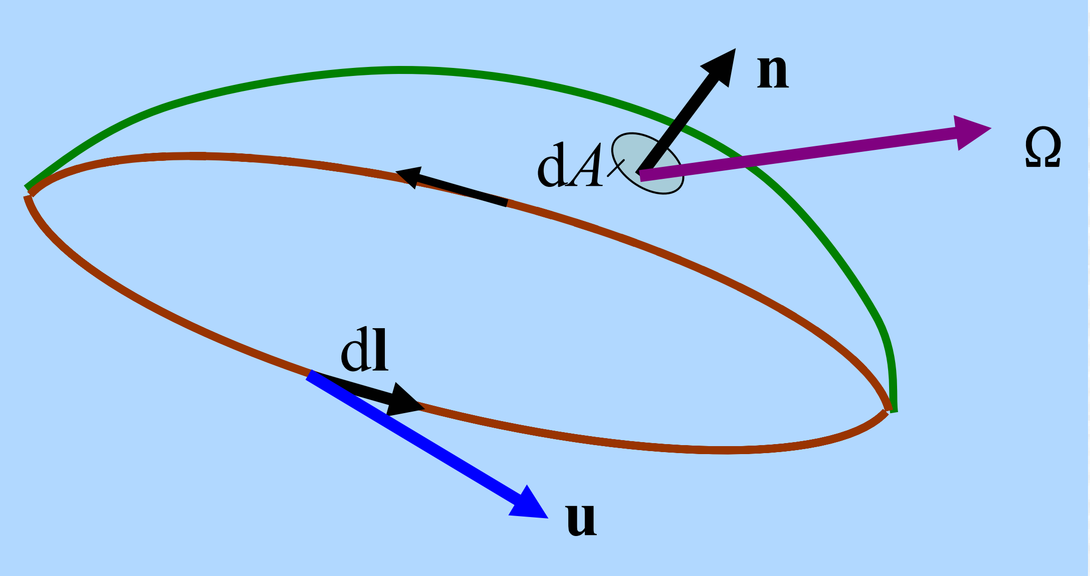
速度环量 定义流速矢量 $\mathbf{u}$ 沿有向曲线 L 的线积分为速度环量

$$\Gamma = \int_L \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

斯托克斯定理

$$\iint_A \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}A = \oint_L \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

封闭曲线 L 是 $\boldsymbol{A}$ 的周界， L 的方向 与 $\mathbf{n}$ 成右手系。



沿 L 的速度环量 ＝ 通过 $\boldsymbol{A}$ 的涡通量

例

已知

不可压缩流体速度分布 $u_x = a\sqrt{y^2+z^2}, u_y = u_z = 0$

求

涡线方程及沿封闭围线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

的速度环量

求涡量场

$$\begin{cases} \Omega_x = \dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \\ \Omega_y = \dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x} = \dfrac{az}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ \Omega_z = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = -\dfrac{ay}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{cases}$$

求涡线

$$\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{z}=\frac{\mathrm{d}z}{-y}$$

$$\begin{cases} y^2+z^2=C_1 \\ x=C_2 \end{cases}$$

求速度环量

在 $z=0$ 平面上，涡量为

$$\Omega_x=\Omega_y=0,\quad \Omega_z=-\mathrm{sgn}(y)a$$

$$\Gamma=\iint_A \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A=\iint_A \Omega_z\,\mathrm{d}A=\iint_A -\mathrm{sgn}(y)a\,\mathrm{d}A=0$$

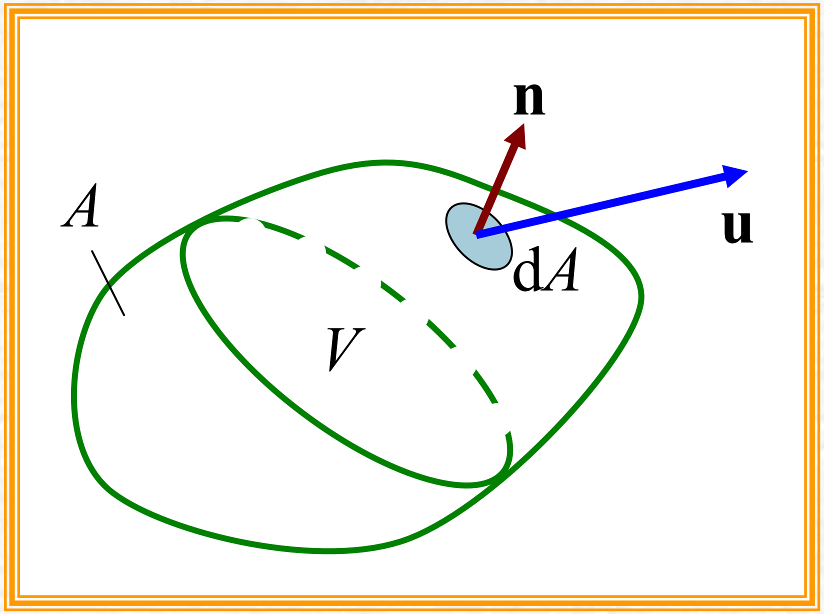
A 关于 $\boldsymbol{x}$ 轴对称

- 旋涡随空间的变化规律

奥—高定理

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}V = \oiint_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}A$$

矢量场通过一封闭曲面的通量（流出为正）等于矢量场的散度在封闭曲面所围空间域上的积分。



根据不可压缩流体连续方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

奥—高定理可解释为：不可压缩流体通过任一封闭曲面的体积流量为零。

涡量场是无源场（管形场）

矢量场的散度表示矢量场的源汇强度。散度为零的矢量场也称无源场，其矢量线必成管状，所以也称管形场。

涡量的散度必为零

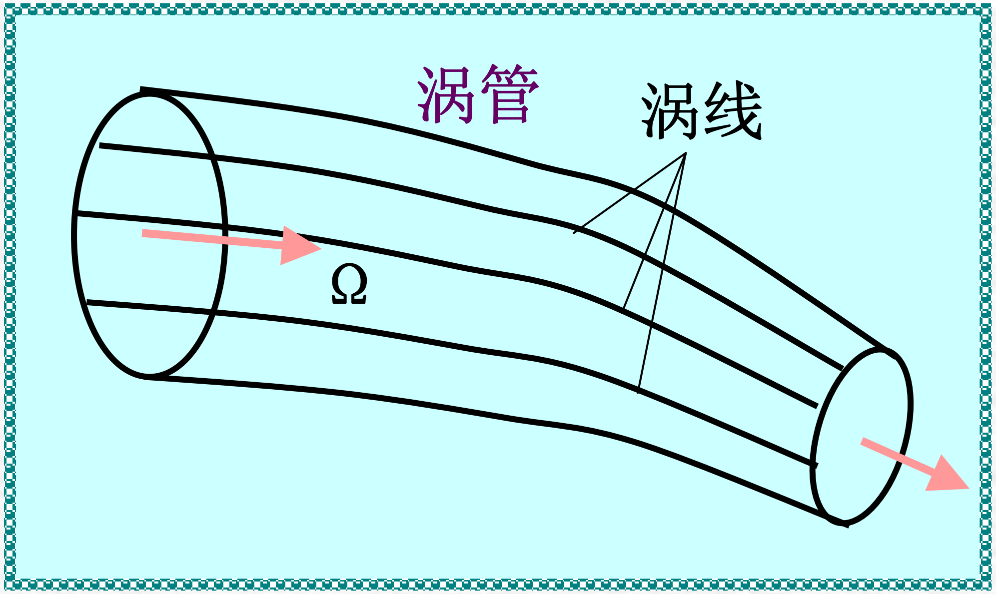
$$\nabla\cdot\mathbf{\Omega}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{u})=\nabla\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0$$

由于涡管侧壁没有涡通量，所以根据涡量场是无源场可得如下结论：

结论

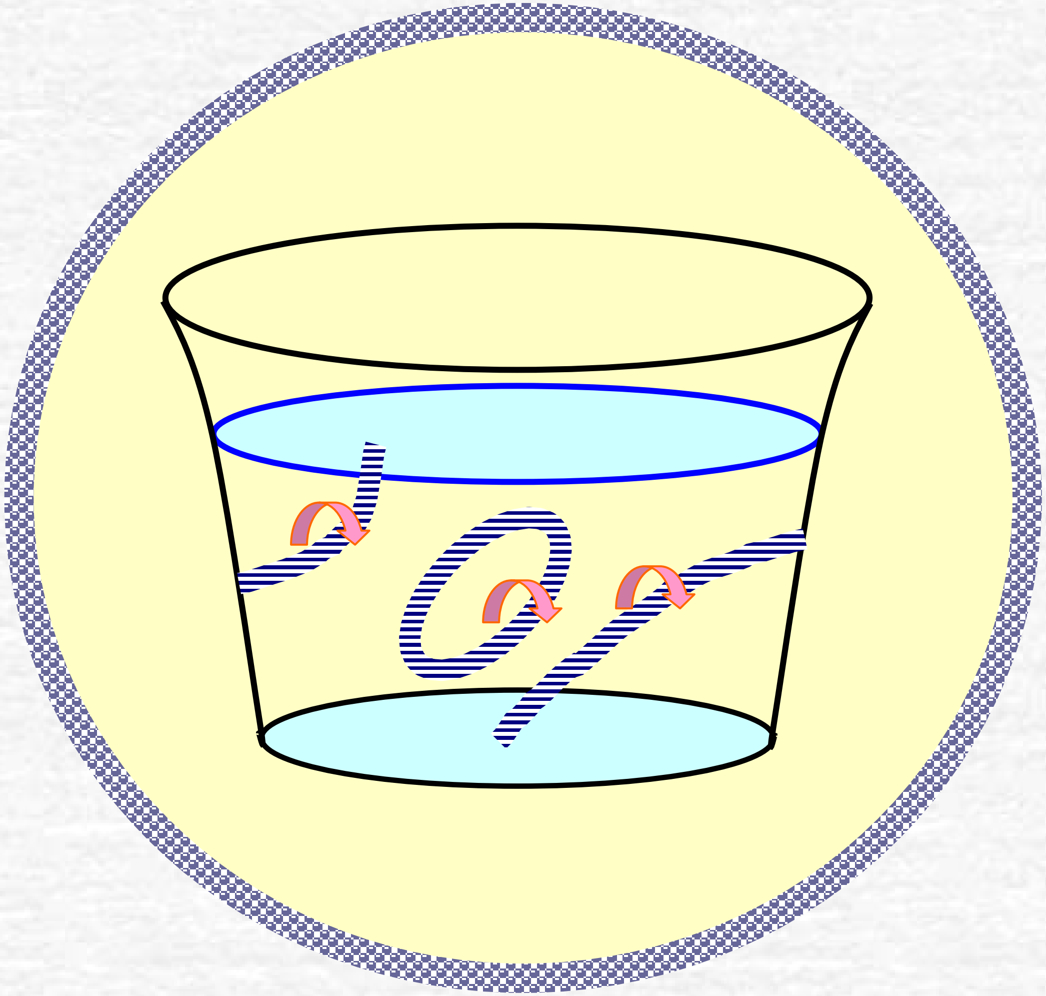
在同一时刻，穿过同一涡管的各断面的涡通量都是相同的。即同一时刻，一根涡管对应一个涡管强度。



这是个纯运动学范畴的定理

回答了前面的问题

涡管不能在流体中产生与消失，要么成环形，要么两端位于流场的自由面或固体边界。



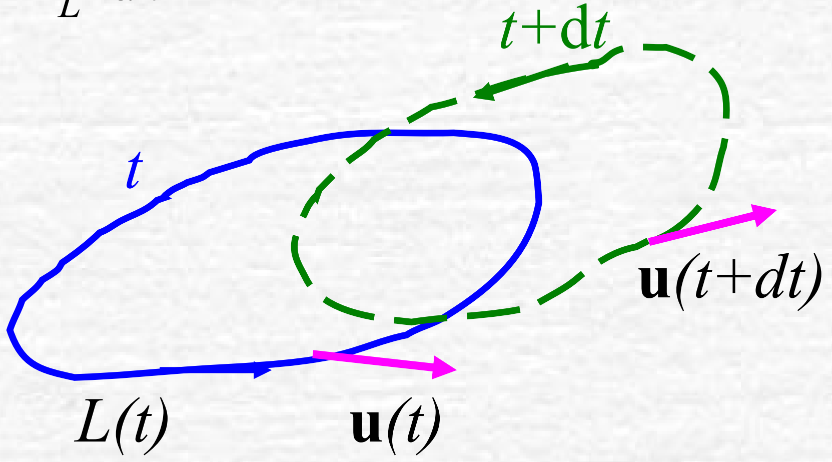
• 旋涡随时间的变化规律

加速度环量

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint_L \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

速度环量对时间的全导数

封闭流体线上的速度环量对于时间的变化率等于此封闭流体线上的加速度环量。



L是由确定流体质点组成的封闭线，是一个系统，在流动中会改变位置和形状。

简要的证明

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \oint_L \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_L \mathbf{u}\cdot\delta\,\mathbf{l}$$

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}\cdot\delta\,\mathbf{l})$$

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\,\mathbf{l}+\oint_L \mathbf{u}\cdot\delta\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} \rightarrow \oint_L \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\,\mathbf{l}+\oint_L \mathbf{u}\cdot\delta\,\mathbf{u}$$

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\,\mathbf{l}+\oint_L \delta\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

d 表示对时间微分

δ 表示对空间微分

- 无旋与有势的等价性

无旋流动 ⇒ 有势流动

$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$

$$\oint_L \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_A \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}A = 0$$

$\int_{M_0}^{M} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ 与路径无关，在起点固定的条件下，是终点位置的函数。

定义

$$\varphi(x,y,z) = \int_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y + u_z\,\mathrm{d}z$$

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ u_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ u_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases}$$

$$\mathrm{d}\varphi = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y + u_z\,\mathrm{d}z$$

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi$$

速度势 ϕ

无旋流动 ⟸ 有势流动

$$\nabla\times\mathbf{u}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=0 \quad \Leftarrow \quad \mathbf{u}=\nabla\varphi$$

无旋流动 $\xLeftrightarrow{\text{等价}}$ 有势流动

§5—2 理想不可压缩流体的旋涡动力学特性

- 开尔文定理

若质量力有势，理想不可压缩流体的运动方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \nabla W - \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

加速度有　势 → 加速度无　旋 → 封闭流体线上的加速度环量为零

↓

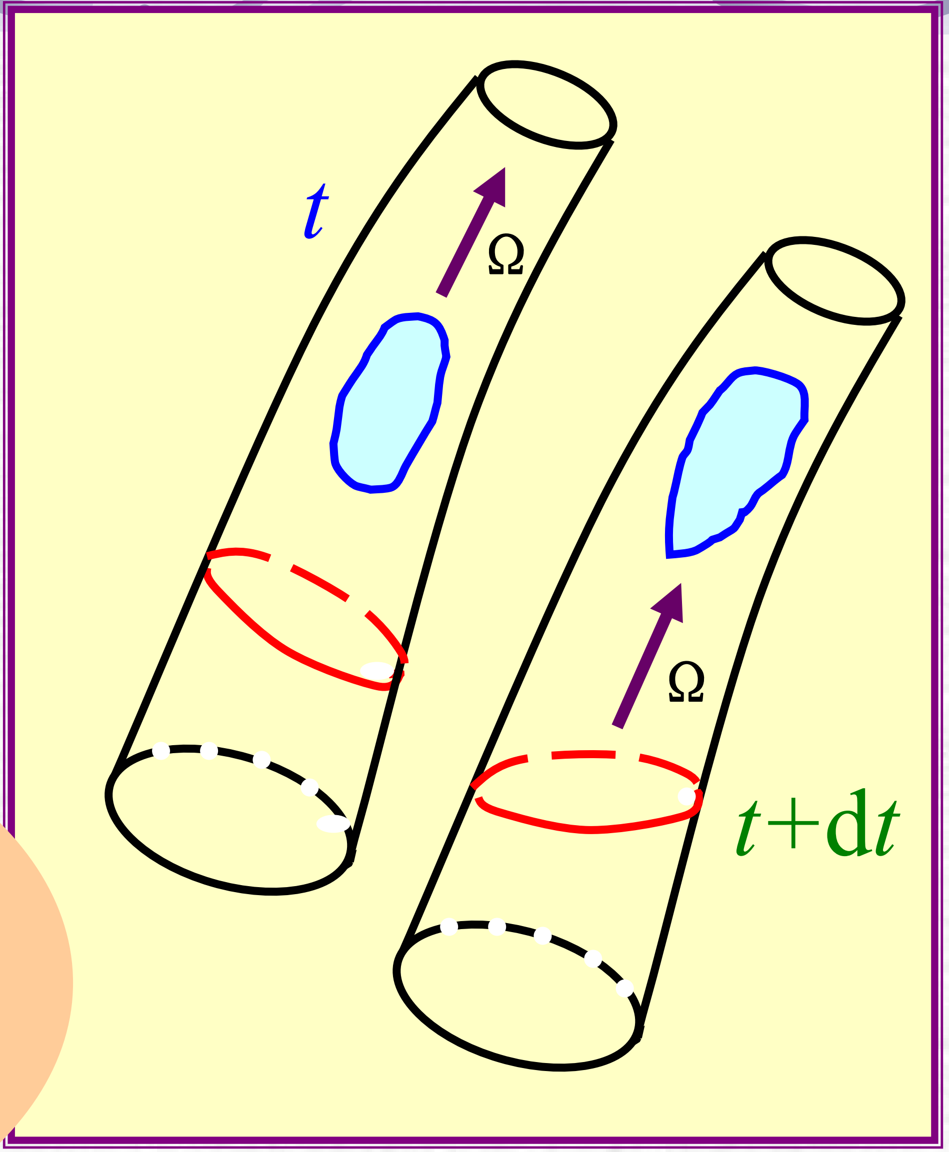
封闭流体线上的速度环量不随时间变化　$\Gamma=\mathrm{const}$

• 亥姆霍兹定理

❖某时刻组成涡管的流体质点将永远组成涡管。

❖涡管的强度在流动中保持不变。

容易通过开尔文定理予以证明，上述亥姆霍兹定理成立的条件应与开尔文定理相同。



- 粘性对旋涡运动的影响

开尔文定理说明，若质量力有势，流体为理想不可压缩流体，那么涡通量不会产生，初始时刻为无旋的流动将永远保持无旋，而有旋流动的涡通量则有保持性，既不会消失，也不会扩散。

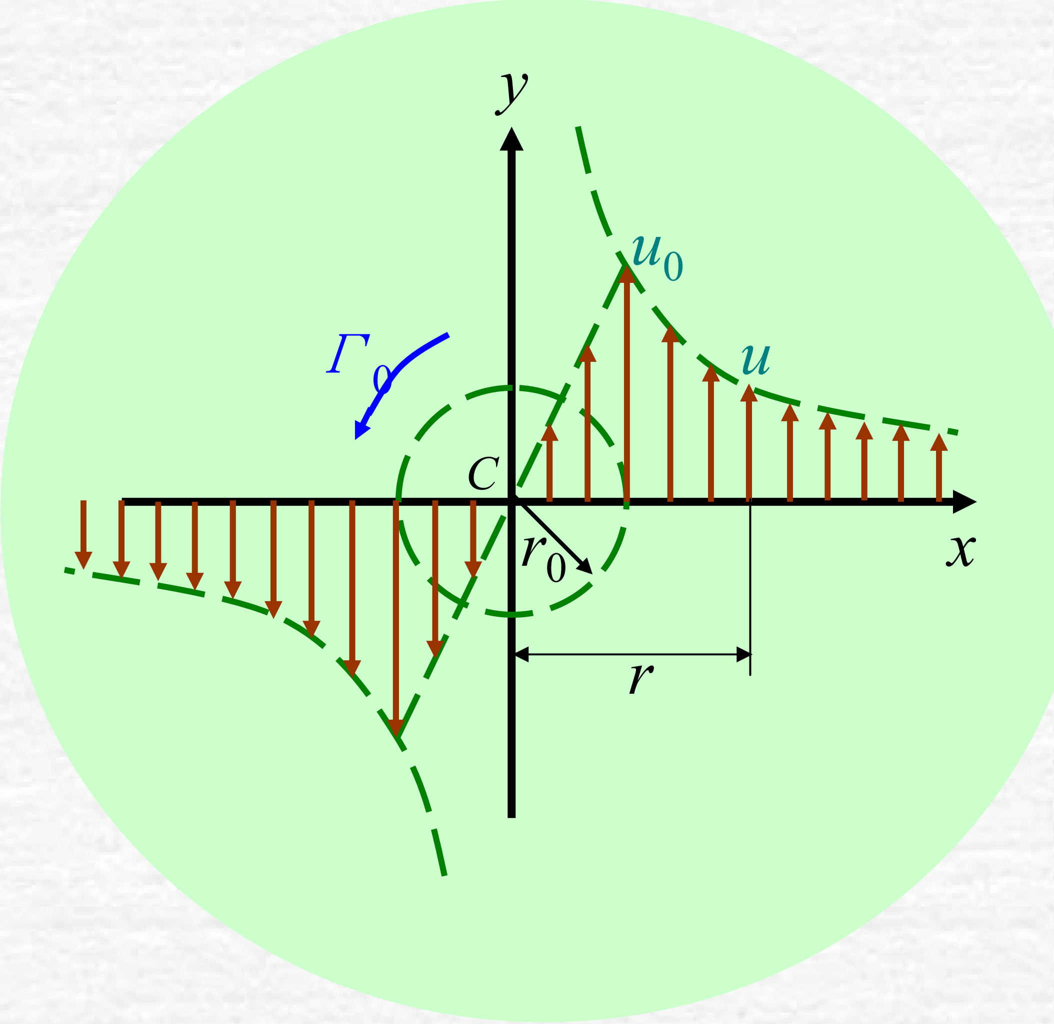
开尔文定理也反过来说明了之所以在实际流体的运动中会有旋涡的产生、发展和消失，以及涡量在流场中的扩散现象，粘性的存在应该是最重要的因素。

§ 5—3 兰肯涡和卡门涡街

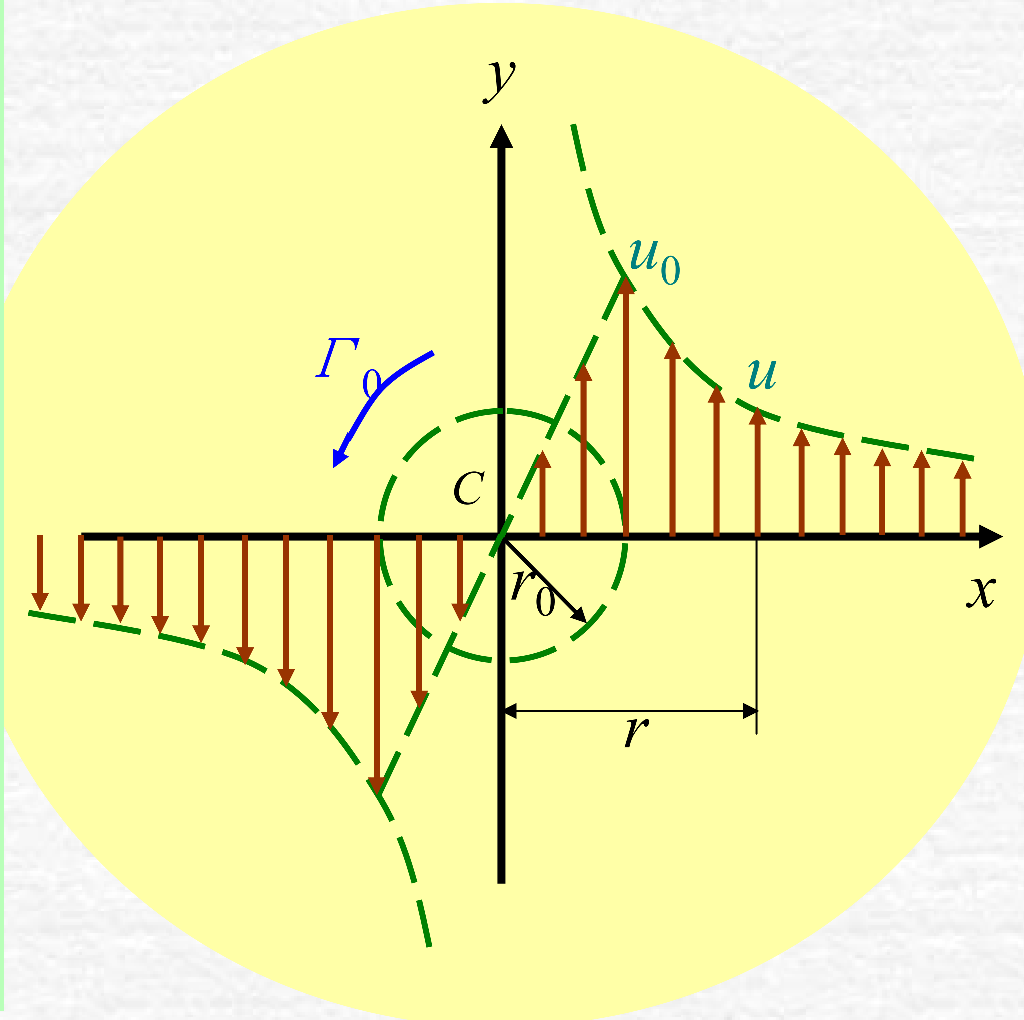
• 兰肯涡

平面组合涡：中心区是强迫涡；外围区是自由涡。*************

中心区是以涡心为圆心的圆，其中的速度与离涡心的距离成正比，涡量为常数。外围部分的流速则与离涡心的距离成反比，流动有势，涡量为零。



兰肯涡是比较接近实际的平面旋涡模型，其中心部分的流体象刚体一样旋转，需有外力不断推动，中心部分也可用圆柱形刚体的转动来代替。外围部分流体的运动在开始时是由中心部分的转动通过粘性的作用形成的，在流动稳定以后，则无须再加入能量，粘性也就不再起作用。



中心区的流动

速度分布

$$u_x = -\omega y, \quad u_y = \omega x$$

$$\omega = \frac{u_0}{r_0}$$

涡量处处为常数

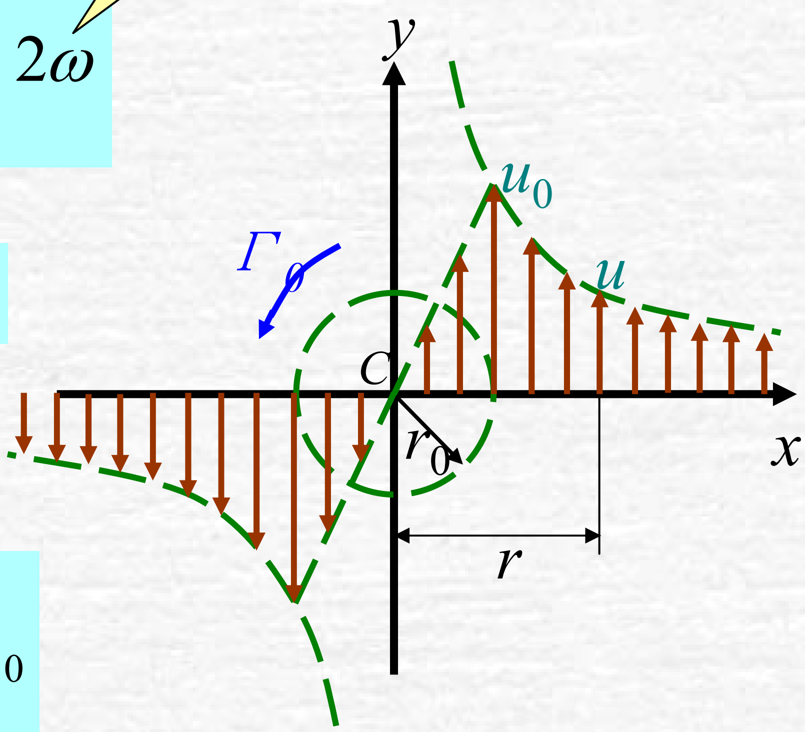
$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega$$

绕 $r = r_0$ 的速度环量

$$\Gamma_0 = 2\pi r_0 \times u_0$$

用涡通量计算得到同样的结果

$$\Gamma_0 = \pi r_0^2 \times 2\frac{u_0}{r_0} = 2\pi r_0 u_0$$



外围区的流动

流速分布

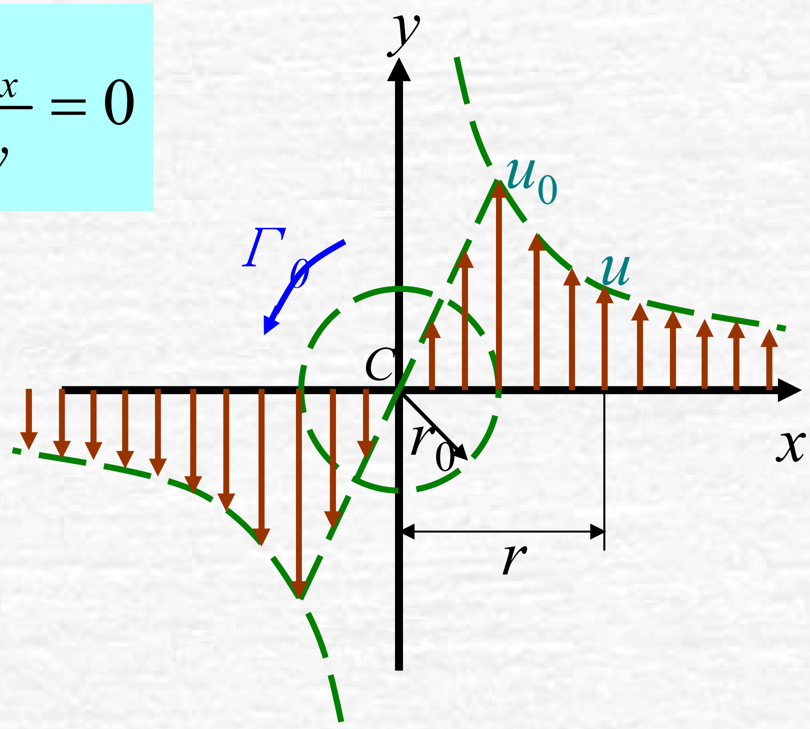
$$u = \frac{r_0}{r} u_0$$

$$u_x = -\frac{y}{r} u = -r_0 u_0 \frac{y}{r^2}, \quad u_y = \frac{x}{r} u = r_0 u_0 \frac{x}{r^2}$$

外围区是无旋流动

$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

绕任一 $r > r_0$ 的圆周（任意包住 $r = r_0$ 的封闭曲线也可）的速度环量都等于 Γ_0



$$\Gamma = 2\pi r \times u = 2\pi r_0 u_0 = \Gamma_0$$

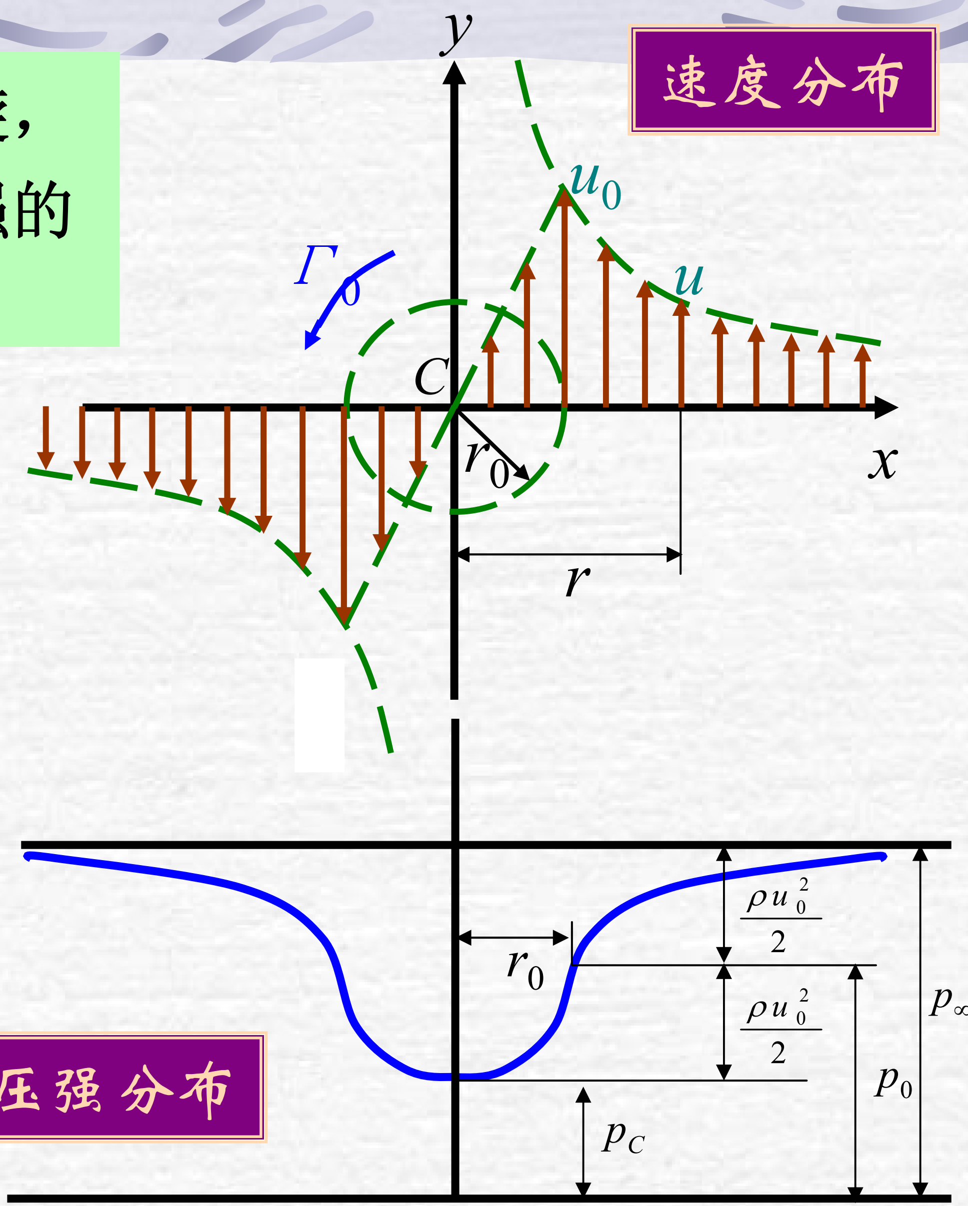
外围区的压强

外围区流动恒定无旋，可用欧拉积分确定压强的径向分布

$$p = p_{\infty} - \frac{\rho u^{2}}{2}$$

$$r = r_{0} \text{ 时 } p_{0} = p_{\infty} - \frac{\rho u_{0}^{2}}{2}$$

中心区流动恒定有旋，只能用伯努利积分，但得不到压强的径向分布。须直接由理想流体运动方程出发求解。



中心区的压强

$$-\omega^2 r = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

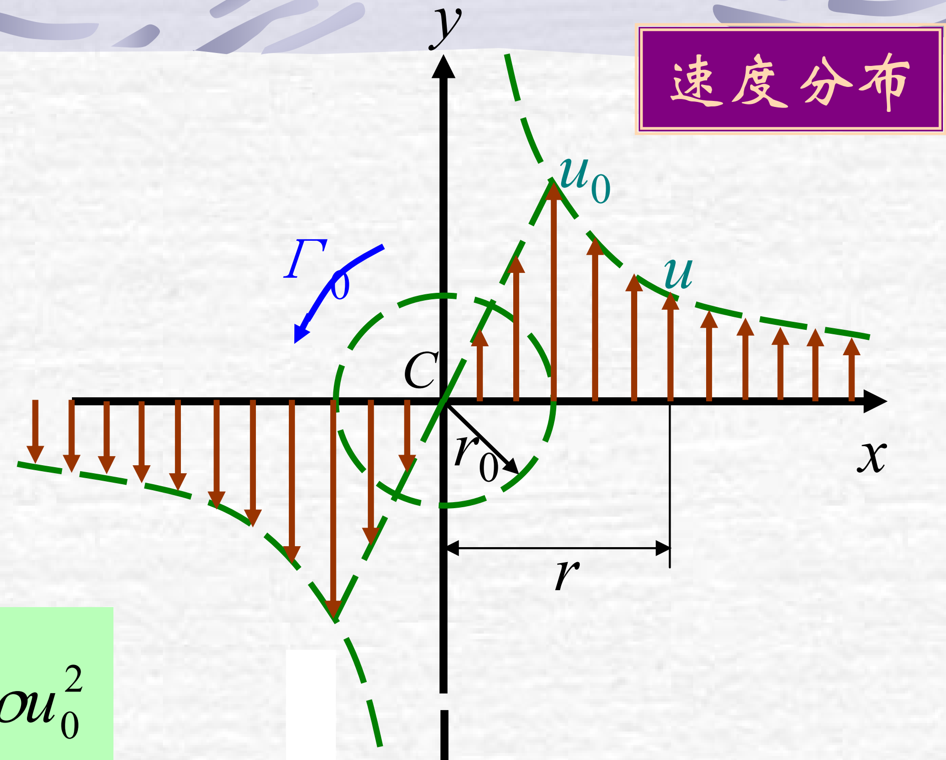
向心力　压差力

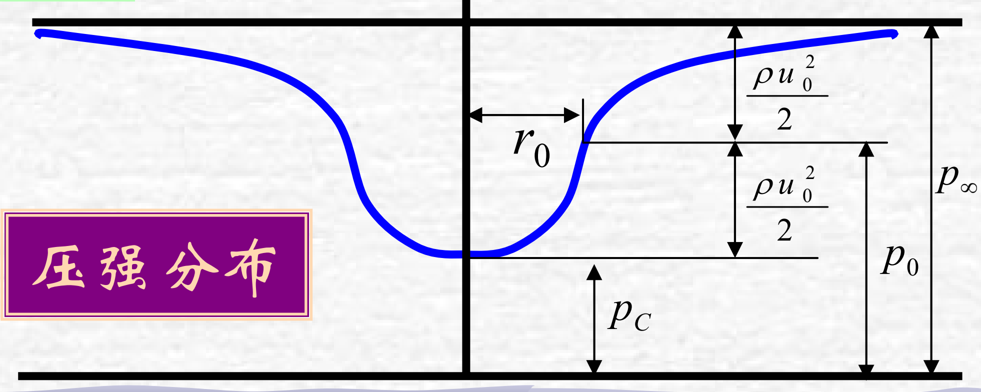
$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + C = \frac{1}{2}\rho u^2 + C$$

由 $p_0 = p_\infty - \frac{\rho u_0^2}{2}$ 定 $C = p_\infty - \rho u_0^2$

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u^2 - \rho u_0^2$$

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho\omega^2 r_0^2$$





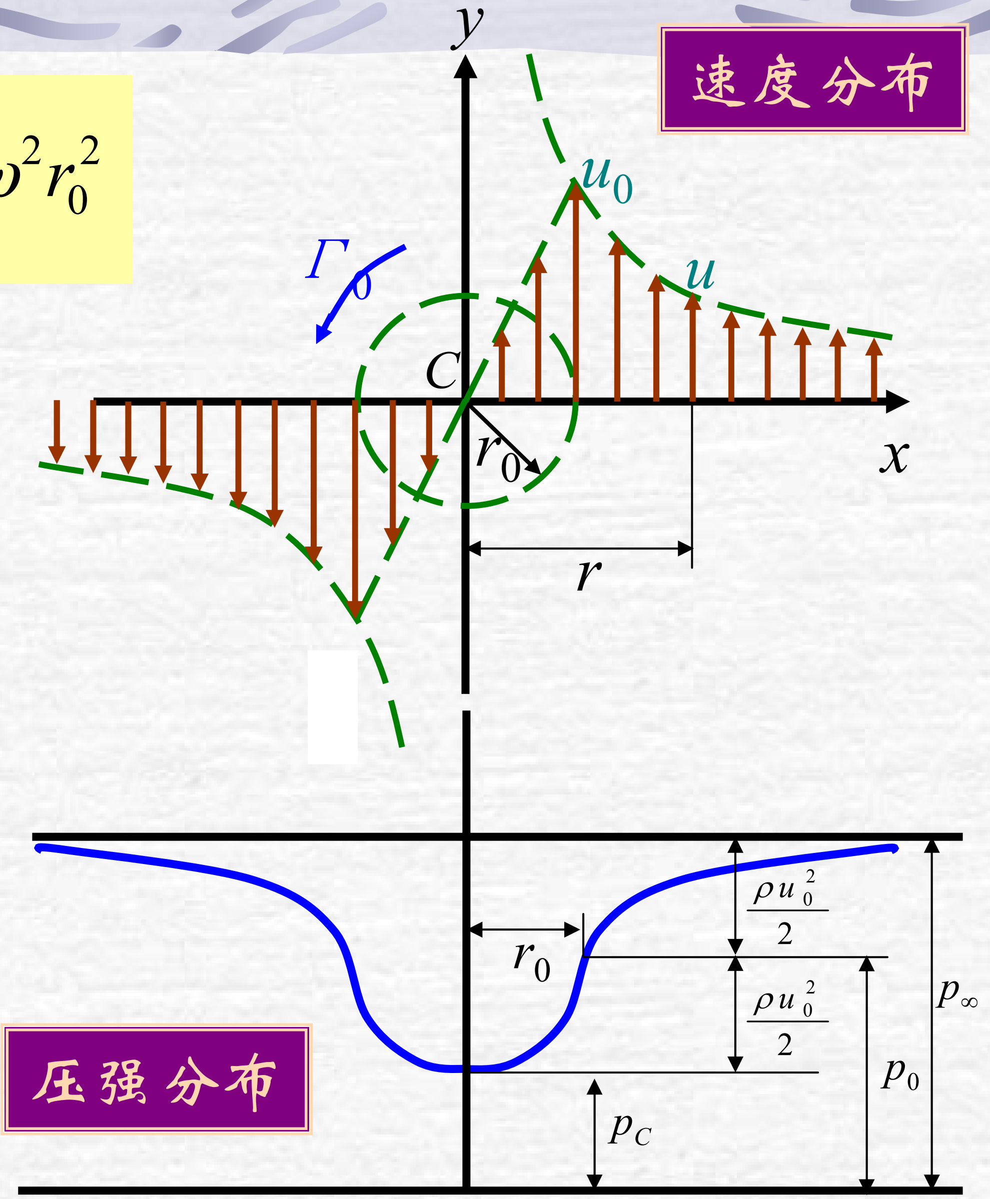
中心区的压强

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho\omega^2 r_0^2$$

抛物线分布，涡心处最低

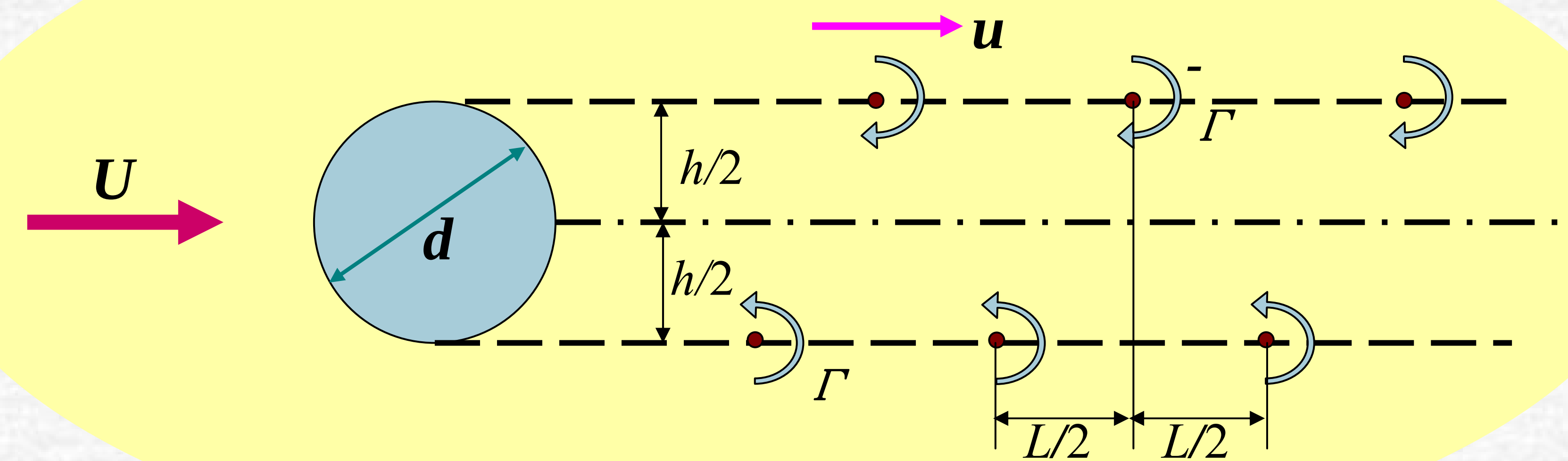
$$p_C = p_\infty - \rho\omega^2 r_0^2$$

中心区速度越快，压强越高，速度越慢，压强越低。与无旋区有本质的不同。



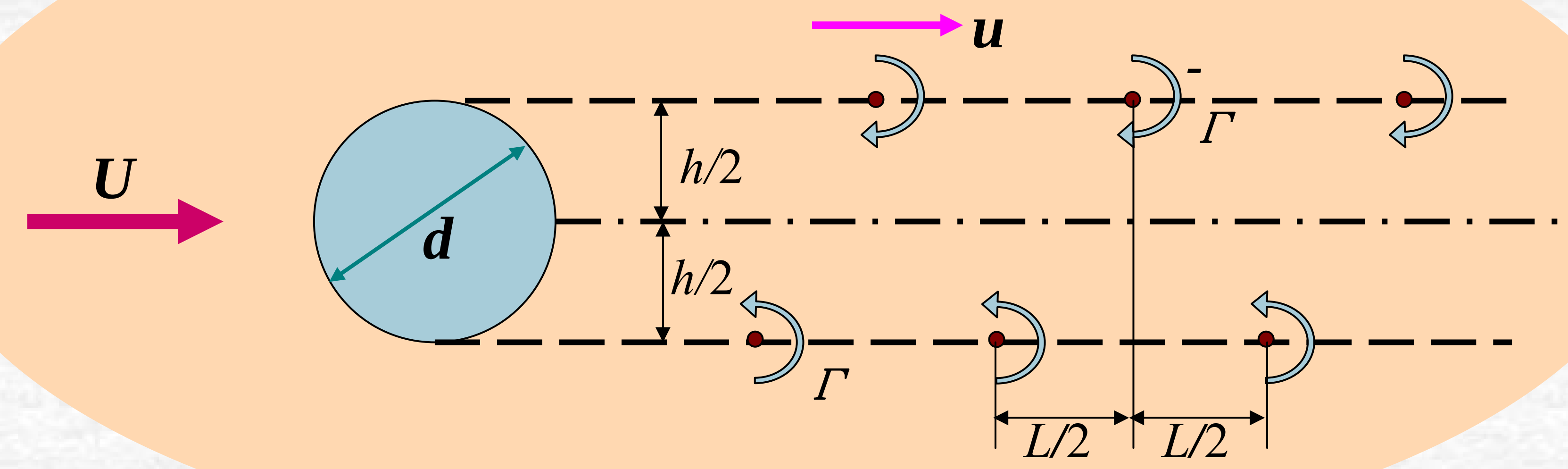
• 卡门涡街

试验发现，定常来流 U 绕过直径为 d 的圆柱体时，在不同雷诺数 $R_e = \dfrac{Ud}{\nu}$ 情况下，圆柱下游有不同的旋涡现象出现。当雷诺数大于 **90** 后，可以看到有规则交错排列的双列线涡，称为卡门涡列，其中尤以雷诺数等于 **150** 左右时最为典型。

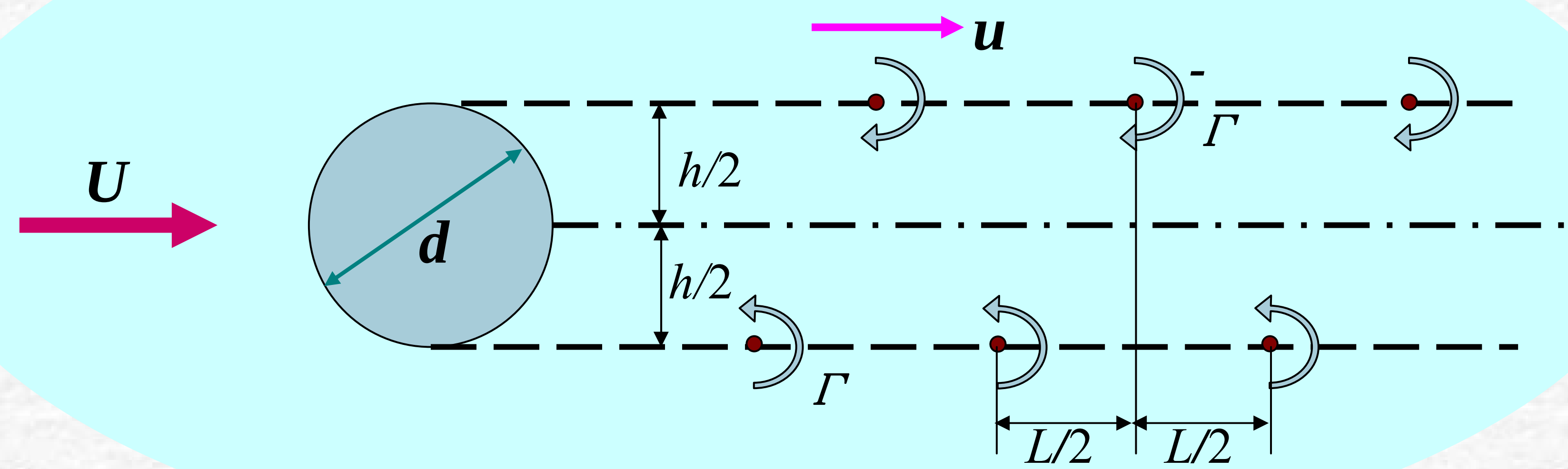


旋涡从圆柱体上交替地脱落到下游，因而形成周期性的振动，旋涡从柱体上脱落的频率 f 将以斯特劳哈尔数表达，并由雷诺数决定

$$S_t = \frac{fd}{U} = F(R_e)$$



从柱体上、下面分别脱落的旋涡，其旋转方向是彼此相反的，同时所有旋涡都以相同速度（因有旋涡间相互干扰，此速度比来流速度小）向下游移动。



卡门的分析研究表明，当涡列的空间尺度为 $h/L=0.281$ 时，涡列对于小扰动才是稳定的，实测证实了这一点。

§5—4 有势流动及解法概述

由开尔文定理可知，理想不可压缩流体从静止或无旋状态开始的流动将保持为无旋流动。所以无旋流动往往是以理想流体为前提条件的。无旋流动即为有势流动。

一. 无旋流动的速度势函数

$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \nabla \varphi$

速度势函数的定义

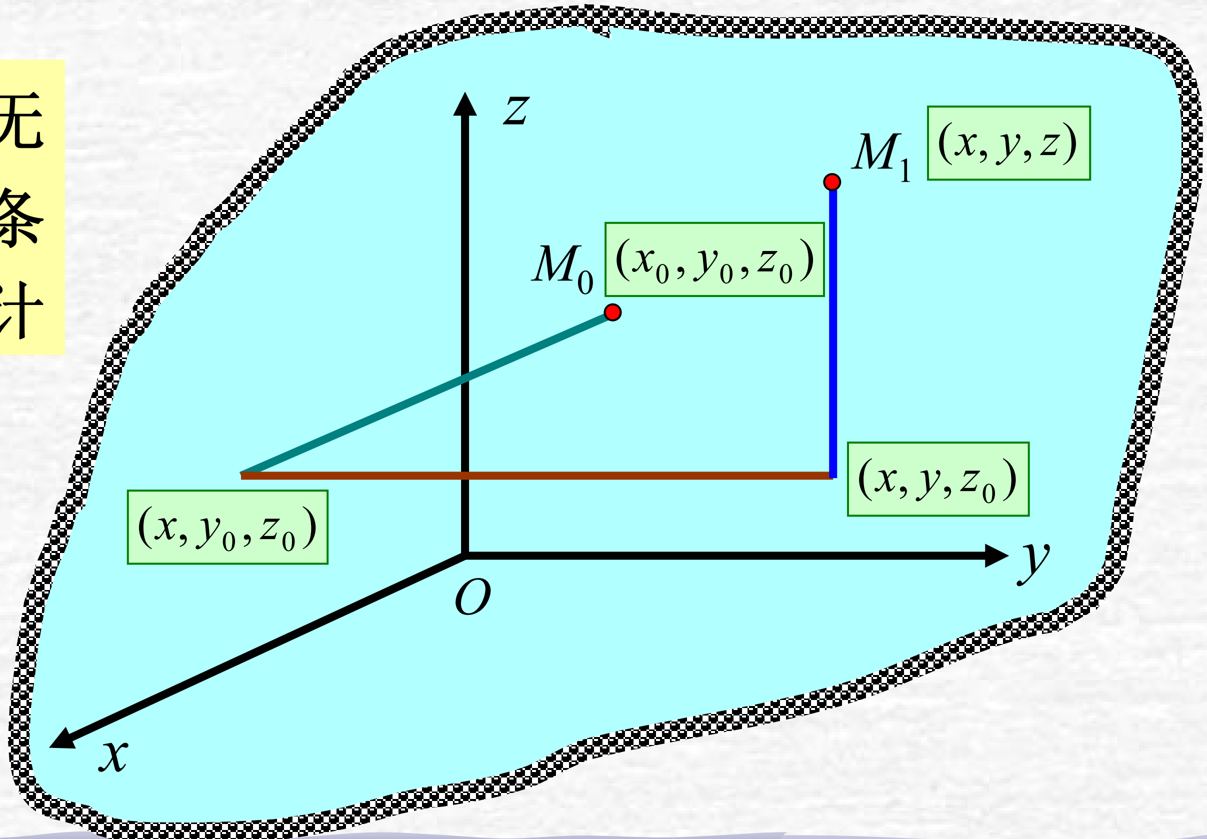
$$\varphi(x,y,z) = \int_{M_0}^{M} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} u_x \, \mathrm{d}x + u_y \, \mathrm{d}y + u_z \, \mathrm{d}z$$

速度势函数的求法（一）

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y_0,z_0)} u_x\,\mathrm{d}x+\int_{(x,y_0,z_0)}^{(x,y,z_0)} u_y\,\mathrm{d}y+\int_{(x,y,z_0)}^{(x,y,z)} u_z\,\mathrm{d}z$$

$\int_{M_0}^{M}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$ 与路径无关，可选一条简便的路径计算。

起点不同，速度势相差一个常数，不会影响对流场的描述。



速度势函数的求法（二）

寻找全微分，确定速度势

$$\mathrm{d}\varphi = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y + u_z\,\mathrm{d}z$$

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Rightarrow \varphi = \int u_x\,\mathrm{d}x + f_1(y,z)$$

代入

$$\begin{cases} u_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ u_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases}$$

确定

$$f_1(y,z)$$

给出流场，求解速度势，要先检查流场是否无旋。

要按照定义求速度势，不要误认为做三个独立的不定积分。

例

已知

速度场 $u_x = 3bx^2 - 3by^2,\ u_y = -6bxy,\ u_z = 0$

求证

此流动是不可压缩流体的平面势流，并求速度势函数。

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 6bx - 6bx = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = -6by$$

$$\varphi = \int (3bx^2 - 3by^2)\,\mathrm{d}x + f(y) = bx^3 - 3bxy^2 + f(y)$$

由 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = u_y = -6bxy$ 知 $f'(y) = 0$ $f(y) = C$

按定义求

$$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,0)}u_x\,\mathrm{d}\,x+\int_{(x,0)}^{(x,y)}u_y\,\mathrm{d}\,y=\int_0^x 3bx^2\,\mathrm{d}\,x+\int_0^y -6bxy\,\mathrm{d}\,y$$

$$=bx^3-3bxy^2+C$$

按三个不定积分求

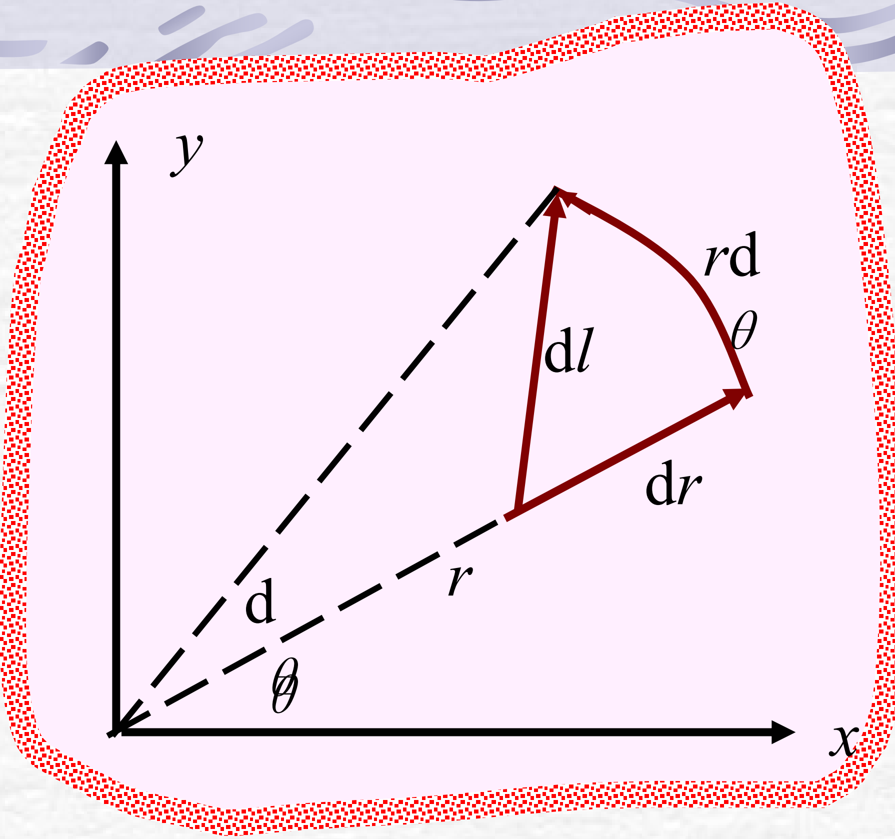
$$\varphi(x,y)=\int u_x\,\mathrm{d}\,x+\int u_y\,\mathrm{d}\,y=\int(3bx^2-3by^2)\,\mathrm{d}\,x+\int -6bxy\,\mathrm{d}\,y$$

$$=bx^3-3bxy^2-3bxy^2+C$$

极坐标中速度势函数的微分为

$$\mathrm{d}\varphi = \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = u_r\,\mathrm{d}r + u_\theta r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = u_r\ , \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = u_\theta$$



不可压流体无旋流动的速度势函数满足拉普拉斯方程。

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot(\nabla\varphi) \equiv \nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数。

例

已知

速度场 $$u_r = \frac{q}{2\pi r},\ u_\theta = 0$$

$r = 0$ 奇点

求证

此流动是不可压缩流体的平面势流，并求速度势函数。

$$u_x = \frac{q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2},\quad u_y = \frac{q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$$

$$\mathrm{d}\varphi = u_r\,\mathrm{d}r + u_\theta r\,\mathrm{d}\theta = \frac{q}{2\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\ln r + C$$

例

已知

速度场 $u_r = 0,\quad u_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$

$r = 0$ 奇点

$$u_x = \frac{-\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2},\quad u_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

求证

此流动是不可压缩流体的平面势流，并求速度势函数。

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$$

$$\mathrm{d}\varphi = u_r\,\mathrm{d}r + u_\theta r\,\mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + C$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

二. 不可压缩流体平面流动的流函数

不可压缩流体平面流动的连续方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$$

改写

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial(-u_y)}{\partial y}=0$$

矢量场 $-u_y\mathbf{i}+u_x\mathbf{j}$ 无旋，必有相应的势函数。

定义其势函数

$$\psi(x,y)=\int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)}-u_y\,\mathrm{d}x+u_x\,\mathrm{d}y$$

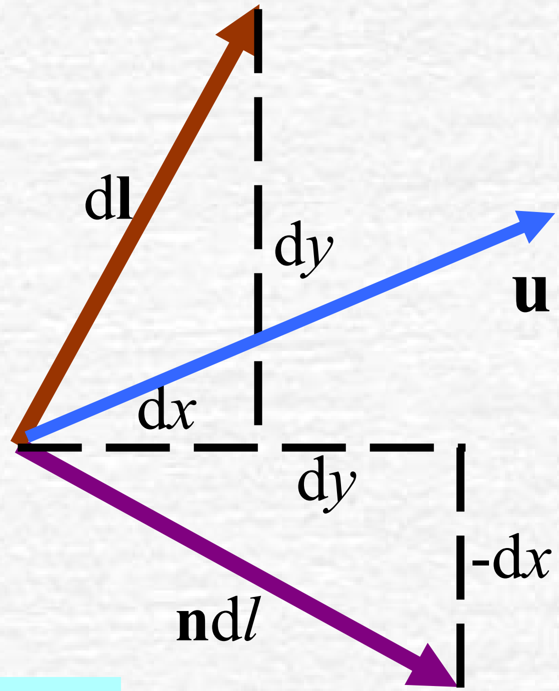
原流速场的流函数

将平面上一段有向微元弧长

$$\mathbf{dl} = \mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j}$$

顺时针转 90^0，方向为 dl 之法向**n**，大小为 dl，可记为 **n**dl

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}l = \mathrm{d}y\mathbf{i} - \mathrm{d}x\mathbf{j}$$



根据流函数定义

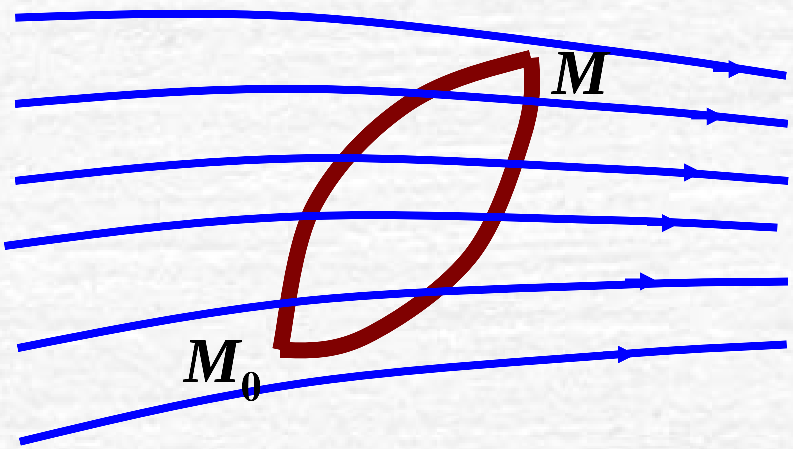
$$\mathrm{d}\psi = u_x\,\mathrm{d}y - u_y\,\mathrm{d}x = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}l$$

流函数的微分为穿过微元弧长的流量，所以把 ψ 称为流函数。

$$\psi(x,y)=\int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)}-u_y\,\mathrm{d}x+u_x\,\mathrm{d}y$$

表示穿过 M_0 至 M 连线的流量，它与连线路径无关，在起点 M_0 确定的情况下是终点 M 的坐标的函数。

对于不可压流体的平面流动是容易理解的，而三维流动就得不到这样的结论。



根据定义确定流函数时选取不同的起点 M_0，流函数将相差一个常数，但同样不会影响对流场的描述。

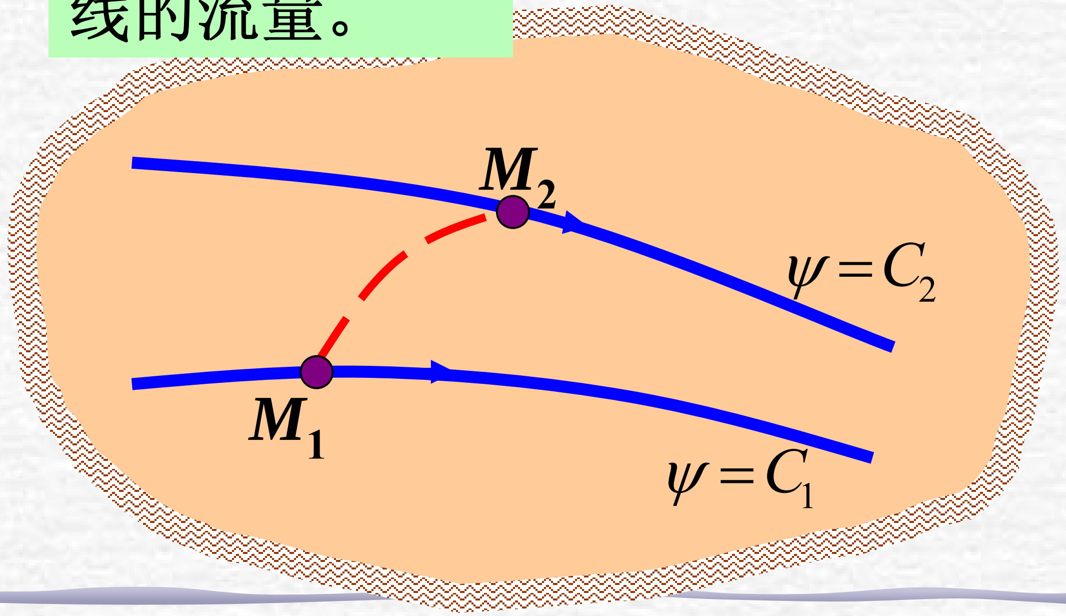
$\psi = C$（常数）

不可压流体平面流动的流线方程

两点流函数的差表示穿过两点间任意连线的流量。

如图中所示, 若

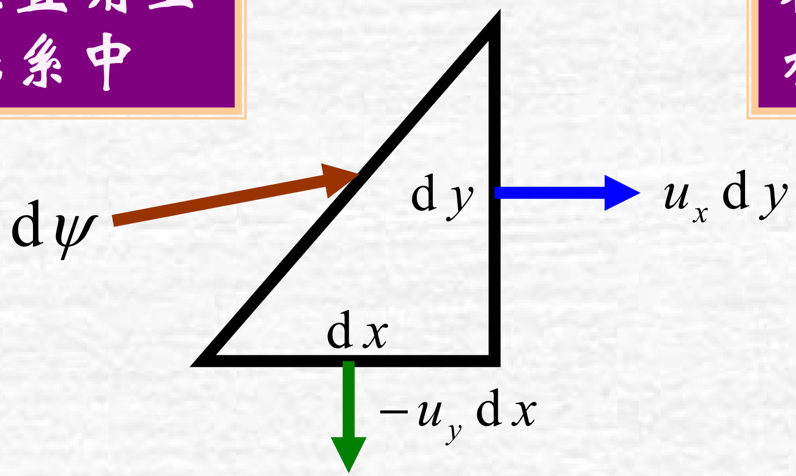
$$\psi(M_2) - \psi(M_1) = C_2 - C_1 > 0$$



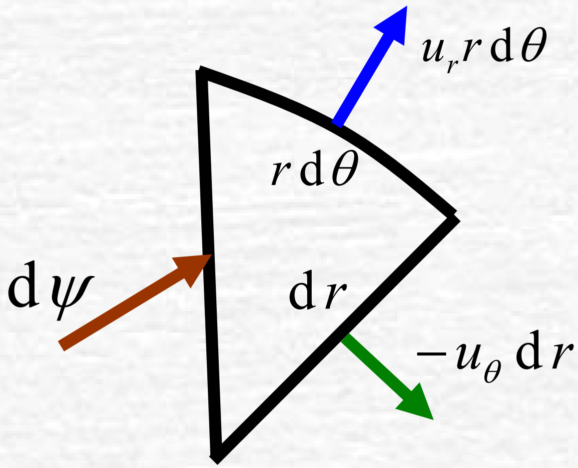
表示有流量自M_1M_2连线左侧流进右侧，由此可确定流动方向。

画出穿过微元弧长的流量示意图，可以帮助记忆流函数定义。

在直角坐标系中



在极坐标系中



$$\mathrm{d}\psi = u_x\,\mathrm{d}y - u_y\,\mathrm{d}x$$

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\mathrm{d}\psi = u_r r\,\mathrm{d}\theta - u_\theta\,\mathrm{d}r$$

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

若已知不可压缩流体平面流动的速度场，则流函数也可用定义直接求或用寻找全微分的方法。

如果不可压流体平面流动是无旋的，那么

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\nabla^2\psi=0$$

说明流函数满足拉普拉斯方程，是调和函数。

流函数的概念本与流动是否无旋无关，在这里引出，是为了下面建立不可压流体平面无旋流动复势的需要。

三. 不可压缩流体平面无旋流动的速度势函数与流函数的关系

不可压流体平面无旋流动既有速度势函数又有流函数，它们都满足拉普拉斯方程，都是调和函数。

根据它们和流速场的关系可知

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

称这对调和函数满足柯西 — 黎曼条件，互为共轭调和函数。

等势线 $\varphi = C$ 和等流函数线（流线）$\psi = C$ 必是互相正交的。

$\varphi = C$ 上取一段微元弧长矢量 **dl**，则

$\mathrm{d}\varphi = \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$ ⇒ $\mathbf{u} \perp (\varphi = C)$ ⇒ $(\psi = C) \perp (\varphi = C)$

注意：

以上速度势函数和流函数的关系是在不可压缩流体平面无旋流动的条件下建立的。

❖在不可压缩流体平面有旋流动中就只有流函数，没有速度势。

如不可压缩流体平面流动的流函数

$$\psi = x + x^2 + y^2$$

$$u_x = 2y,\quad u_y = -2x - 1$$

流动有旋，不存在速度势。

❖在不可压缩流体三维无旋流动中就只有速度势，没有流函数。

求速度势

查是否无旋

求流函数

查是否平面不可压

四．理想不可压缩流体恒定有势流动的解法概述

求解矢量场$\mathbf{u}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{u}=\nabla\varphi$ $\Rightarrow$ 求解数量场φ

求解欧拉方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

四个未知数

$\mathbf{u}\,,p$

求解拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

的边值问题

＋

欧拉积分 $z+\dfrac{p}{\gamma}+\dfrac{\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi}{2}=C$

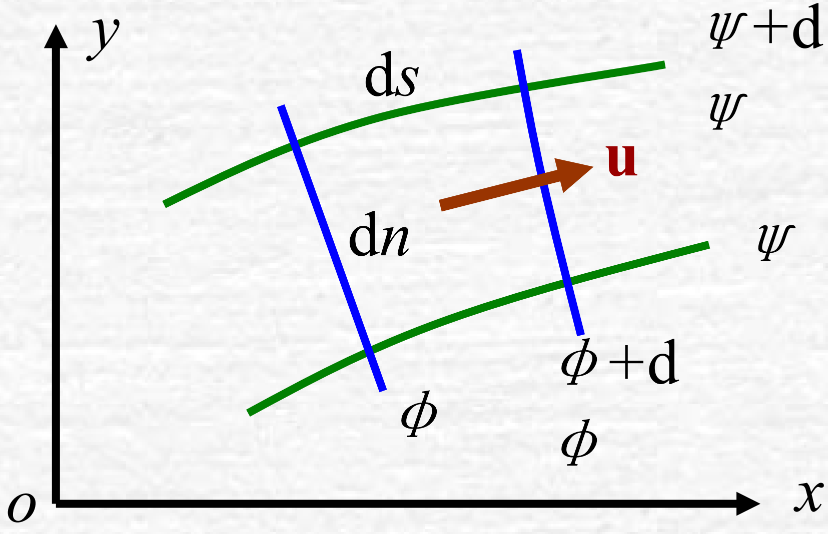
拉普拉斯方程的边值问题在适定的边界条件下有唯一解。

理想不可压流体恒定平面有势流动同时存在速度势函数φ和流函数ψ，这是一对共轭调和函数。给流场的求解带来更大的简便。

常用的解法

- 分离变量法
- 奇点分布法
- 保角变换法
- 数值解法
- 几何（流网）法
- 实验（如水电比拟等）方法

绘制流网是求解理想不可压流体定常平面有势流动的一种近似的几何方法，流网是由等速度势函数线族和等流函数线（流线）族构成的正交网格。一般取速度势函数和流函数的增量相等，流网呈正方形。根据流网可以图解流速，再由欧拉积分推算压力。

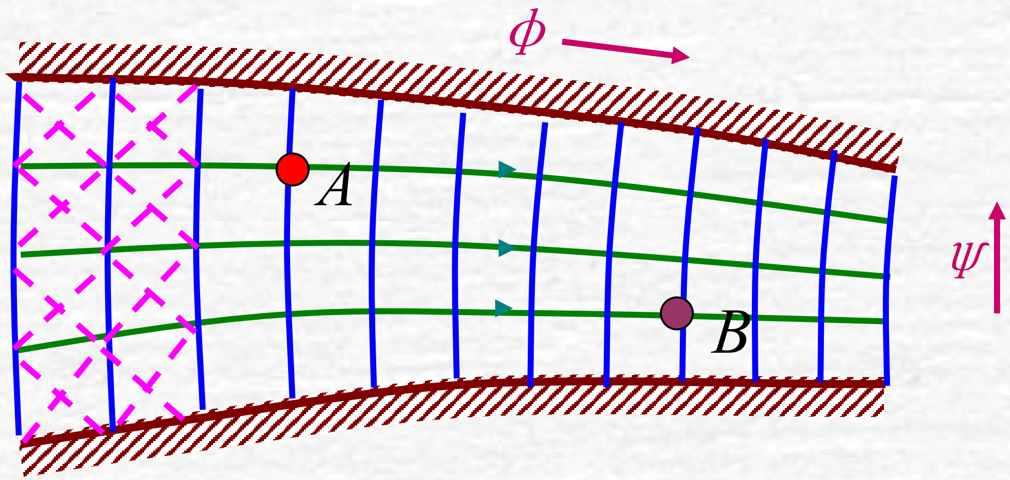


$$d\varphi = u\,ds$$

$$d\psi = u\,dn$$

$$d\varphi = d\psi \Rightarrow ds = dn$$

绘制流网要点:固壁为等流函数线(流线)；流线间隔按流量相同划分，断面流速均匀，则流线间距相等；自由面也是一条流线，但其位置、形状未知，需利用压强条件逐渐确定。



$$u_A < u_B$$

$$p_A > p_B$$

$$\varphi_A < \varphi_B$$

$$\psi_A > \psi_B$$

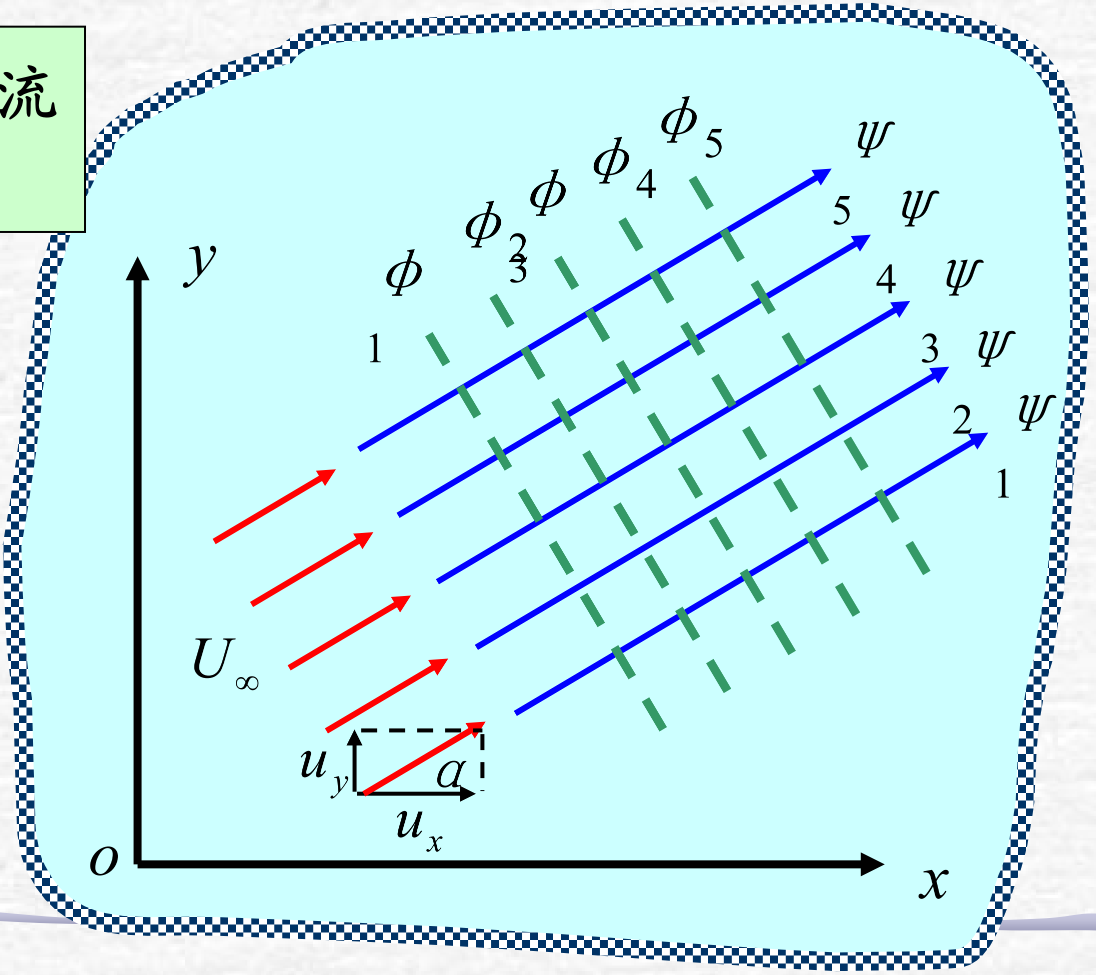
流网密处，流速大、压强小。流网疏处，流速小、压强大。已知一点处流速、压强，可知各点流速和压强。

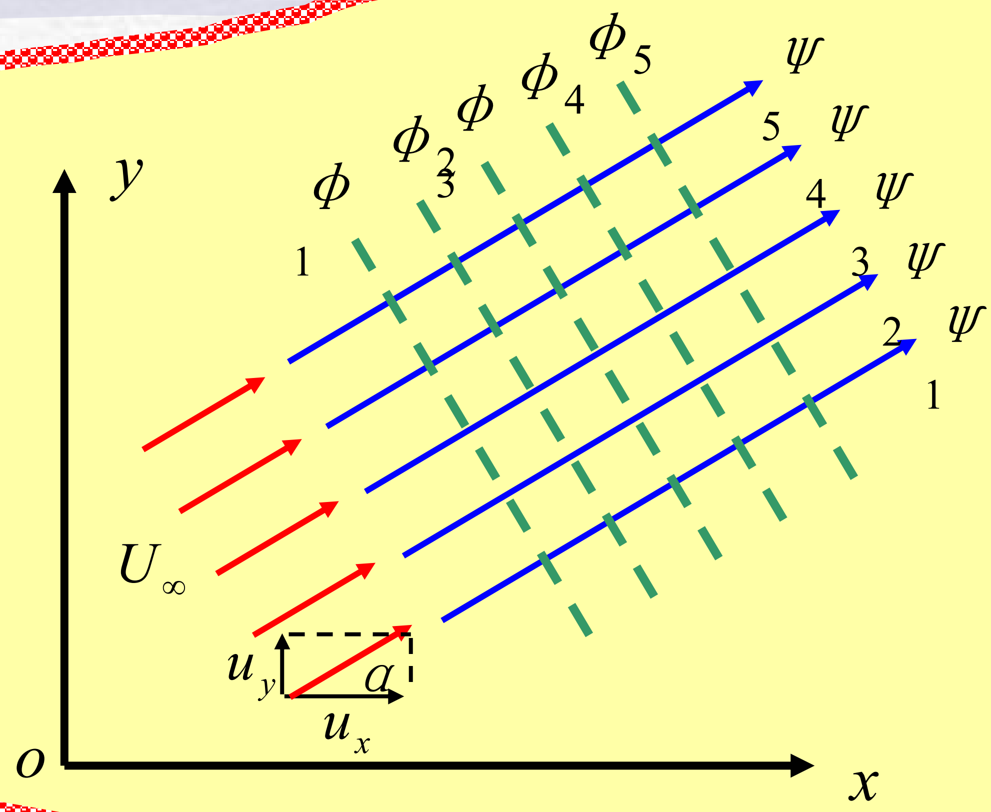
§5—5 理想不可压缩流体恒定平面势流的奇点分布解法

一. 几种基本的不可压缩流体平面有势流动

直线等速流动

整个流场速度都一样，大小 U_∞，与 x 轴夹角 α





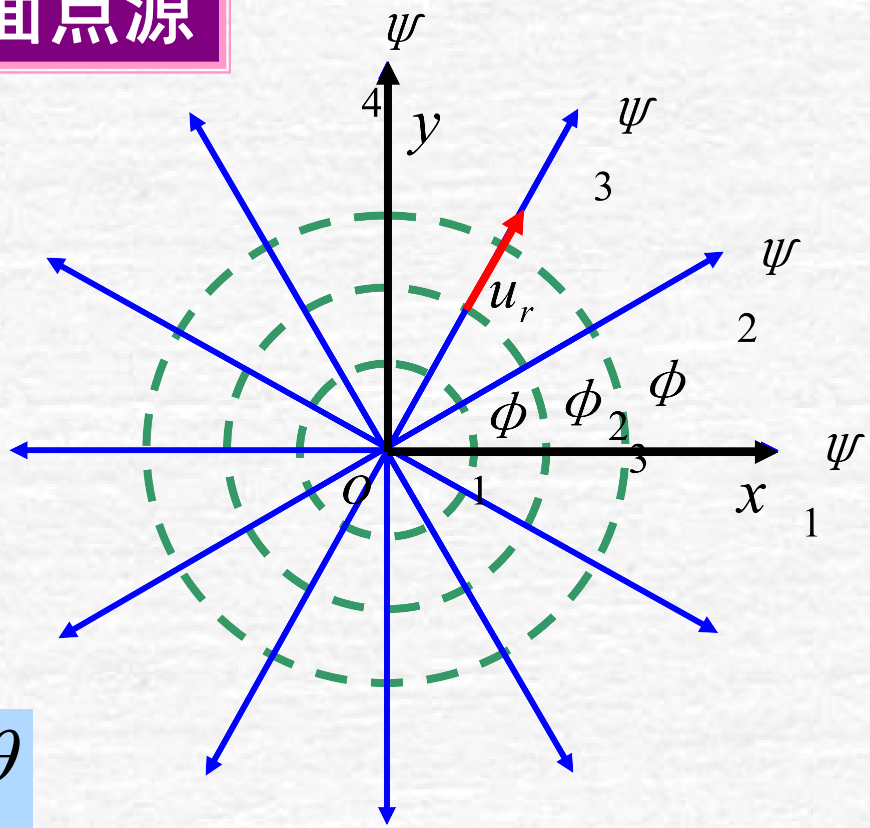
$$\begin{cases} u_x = U_\infty \cos\alpha \\ u_y = U_\infty \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = U_\infty (x\cos\alpha + y\sin\alpha) \\ \psi = U_\infty (-x\sin\alpha + y\cos\alpha) \end{cases}$$

平面点源

实际上是与流动平面垂直的一条无限长线源，单位长度源强为q

q为正称为点源，q为负称为点汇。

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{q}{2\pi r} \\ u_\theta = 0 \end{cases}$$



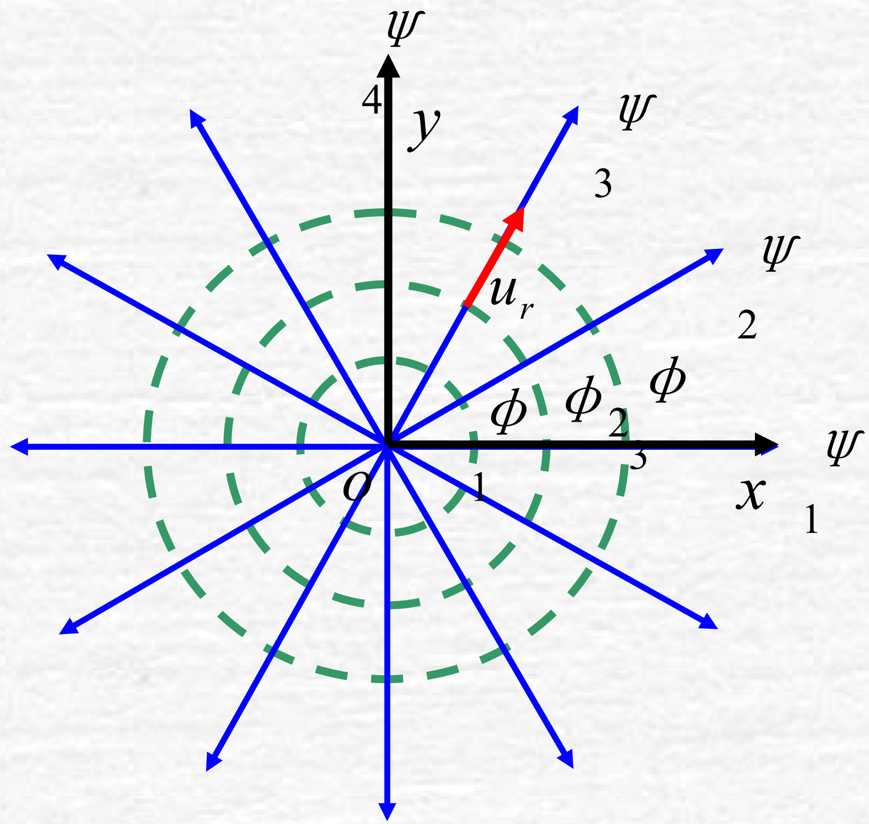
$$\mathrm{d}\varphi = \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = u_r\,\mathrm{d}r + u_\theta r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{q}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\ln r = \frac{q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$d\psi = u_r r\,d\theta - u_\theta\,dr = \frac{q}{2\pi}d\theta$$

$$\boxed{\psi = \frac{q}{2\pi}\theta = \frac{q}{2\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}}$$



等势线

以点源为圆心的同心圆

流线

从点源出发的半射线

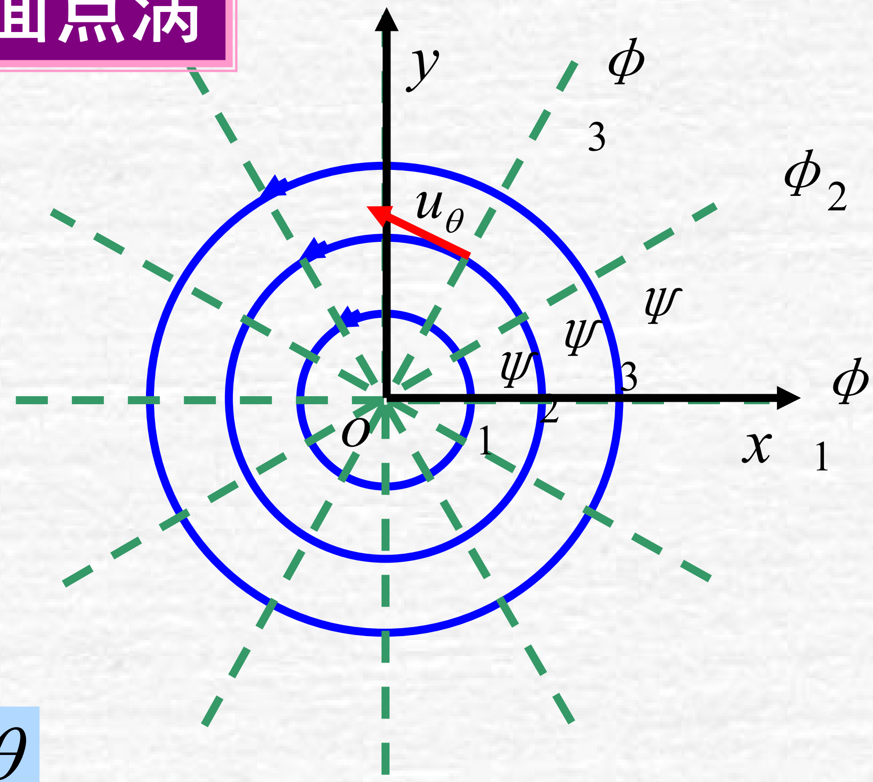
点源处 $r=0$, $u=\infty$ ，是流场的奇点

平面点涡

实际上是与流动平面垂直的一条无限长线涡，涡强为 Γ．兰肯涡的简化模型。

Γ 以逆时针为正，顺时针为负。

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$



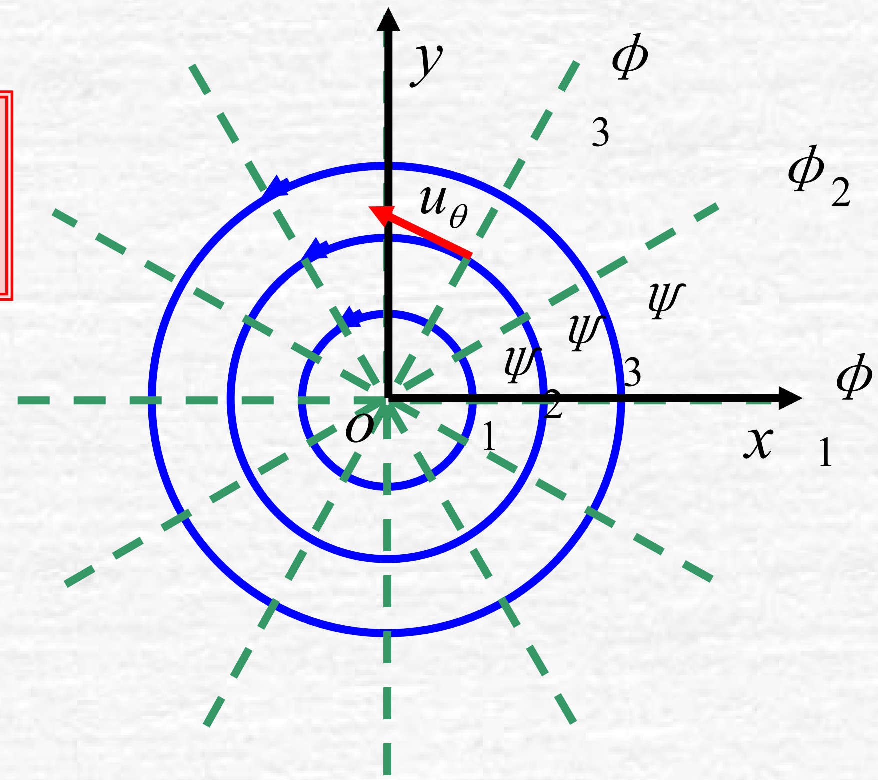
$$\mathrm{d}\varphi = \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = u_r\,\mathrm{d}r + u_\theta r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

$$\mathrm{d}\psi = u_r r\,\mathrm{d}\theta - u_\theta\,\mathrm{d}r = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$



等势线

从点源出发的半射线

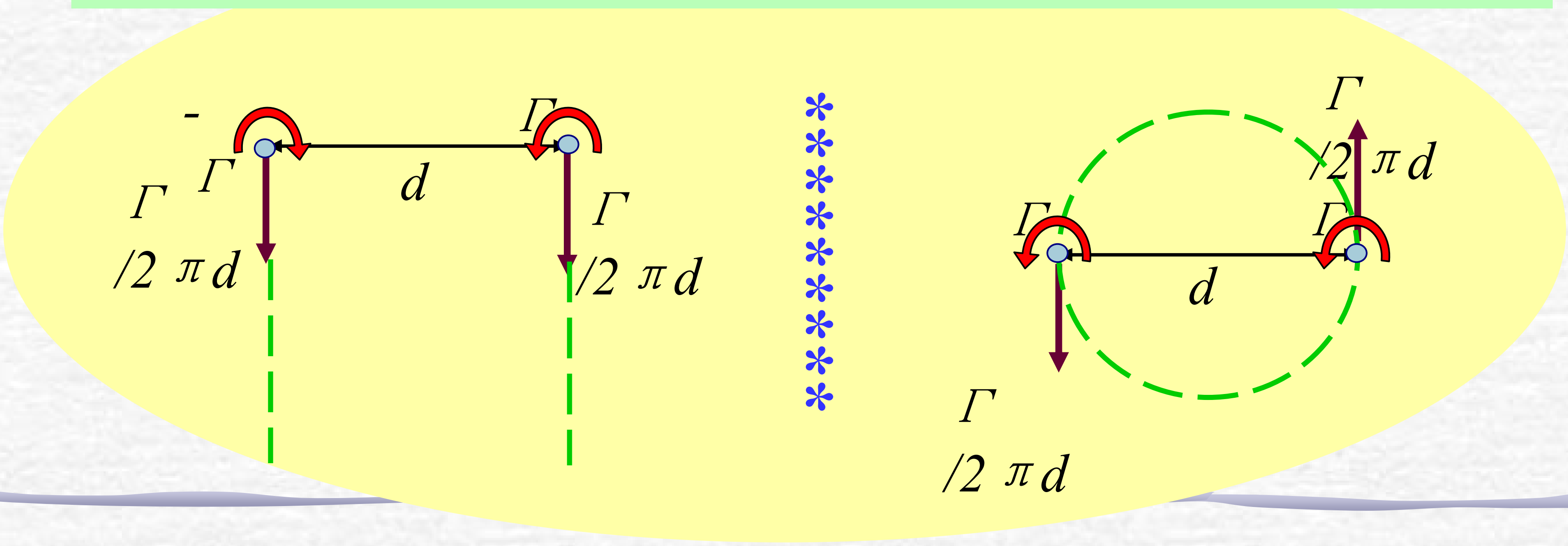
流线

以点源为圆心的同心圆

点涡处 $r=0$, $u=\infty$ ，是流场的奇点

上面的公式都是针对奇点处于原点得到的，若有多个奇点，必有奇点不在原点位置，如为(a,b)，则相应的公式中(x,y)改为(x-a,y-b).

流场中若有多个点涡，各点涡处于其它点涡诱导的流场中，整个点涡组将会运动。点涡对自身的诱导速度为零。



二. 基本有势流动的叠加

- **势流叠加原理**

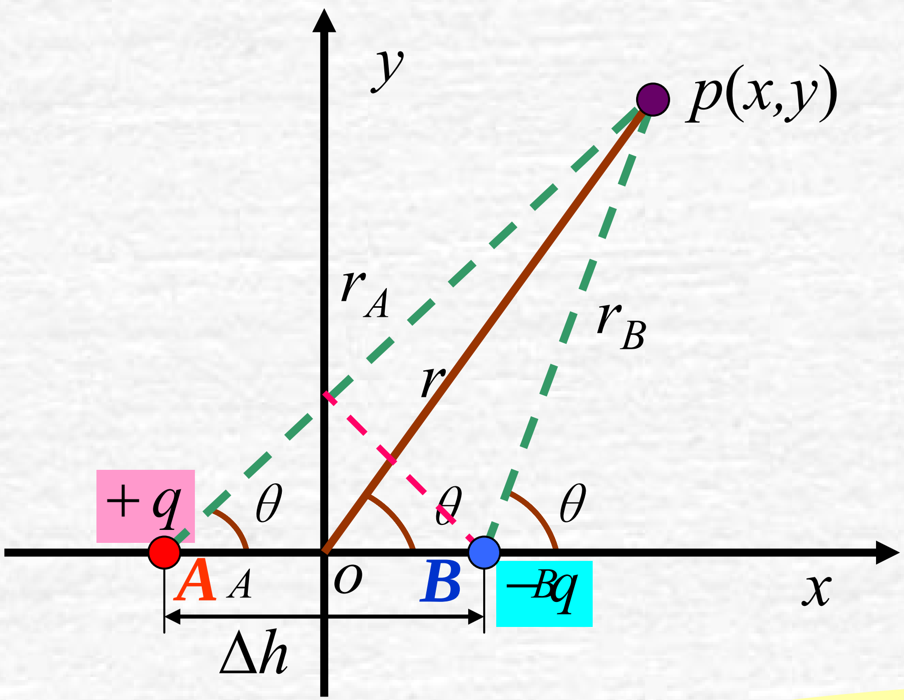
拉普拉斯方程是线性齐次的，解的线性组合仍是解。

$$\nabla^2\varphi_1 = 0,\quad \nabla^2\varphi_2 = 0 \Rightarrow \nabla^2(a\varphi_1 + b\varphi_2) = 0$$

根据叠加原理，可用基本有势流动叠加成较复杂的有势流动。

- **平面偶极子**

一对等强度的源和汇叠加的极限情况



间距 $\Delta h \to 0$

强度 $q \to \infty$

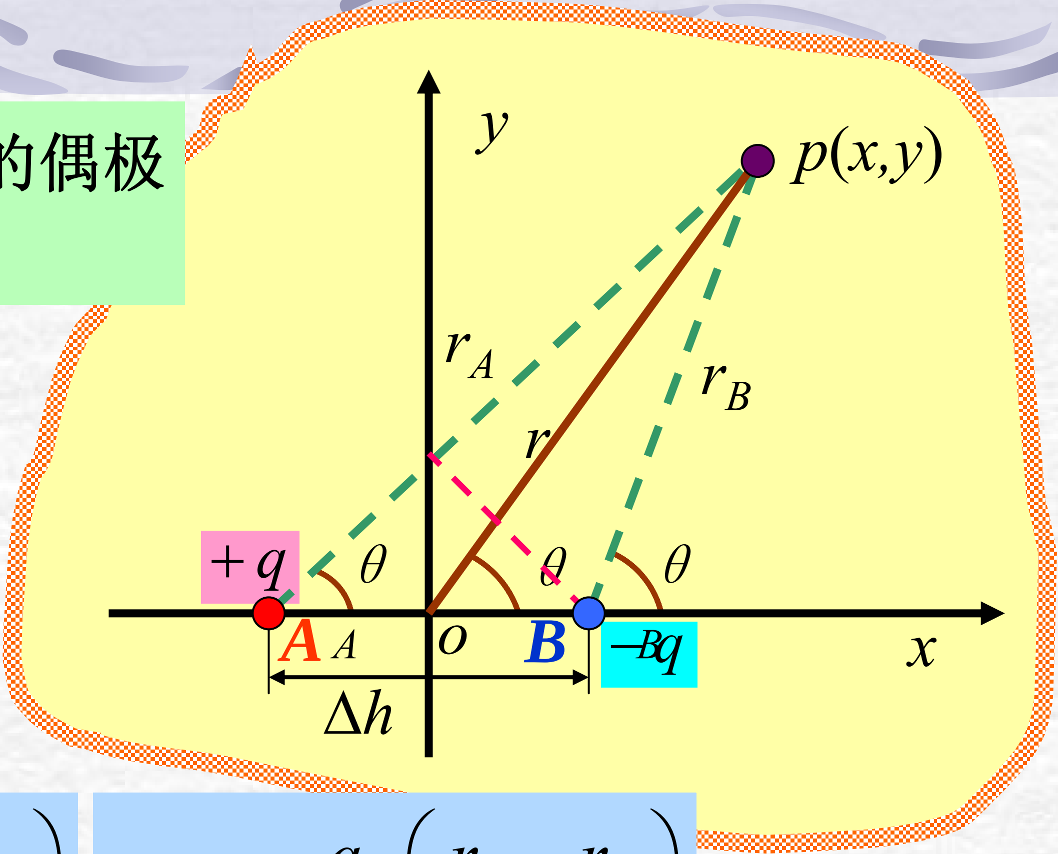
$q\Delta h = m$ 保持不变

即 $\lim\limits_{\substack{\Delta h \to 0 \\ q \to \infty}} q\Delta h = m$

偶极子强度：m

偶极子方向：汇→源

强度为m，方向为 $-x$ 轴的偶极子的速度势



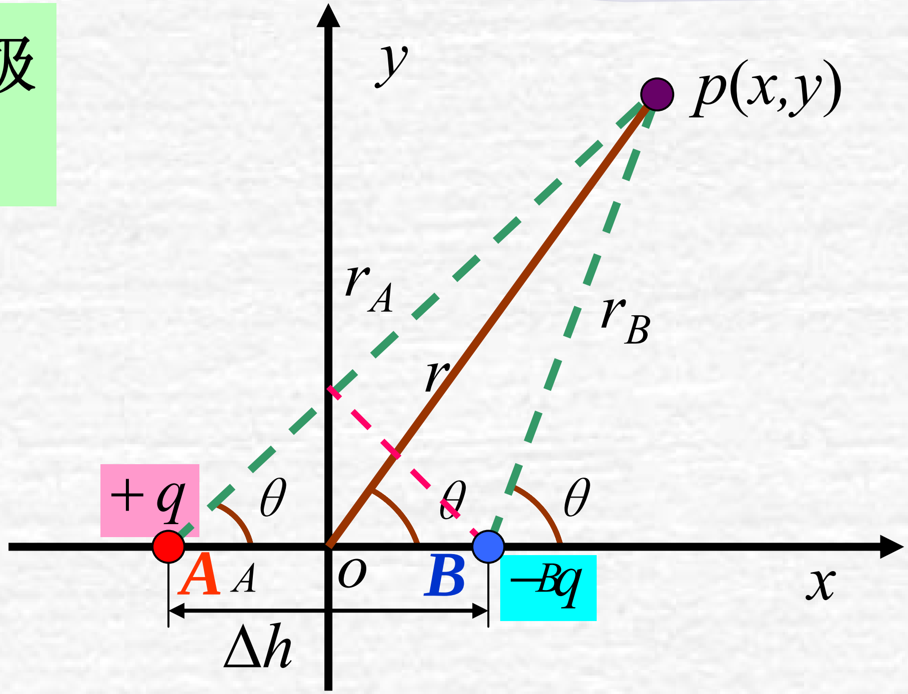
$$\varphi=\lim_{\substack{\Delta h\to 0\\ q\to\infty}}\frac{q}{2\pi}(\ln r_A-\ln r_B)$$

$$=\lim_{\substack{\Delta h\to 0\\ q\to\infty}}\frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_A}{r_B}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta h\to 0\\ q\to\infty}}\frac{q}{2\pi}\ln\left(1+\frac{r_A-r_B}{r_B}\right)=\lim_{\substack{\Delta h\to 0\\ q\to\infty}}\frac{q}{2\pi}\left(\frac{r_A-r_B}{r_B}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\Delta h\to 0\\ q\to\infty}}\frac{q}{2\pi}\frac{\Delta h\cdot\cos\theta}{r_B}=\frac{m}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}=\frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

强度为m，方向为 $-x$ 轴的偶极子的流函数



$$\psi = \lim_{\substack{\Delta h \to 0 \\ q \to \infty}} \frac{q}{2\pi}(\theta_A - \theta_B)$$

$$= \lim_{\substack{\Delta h \to 0 \\ q \to \infty}} \frac{q}{2\pi}\left(-\frac{\Delta h \cdot \sin\theta}{r}\right)$$

$$= -\frac{m}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} \qquad = -\frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

偶极子方向为 x 轴，结果反号。

偶极子的等势线

$$\varphi = C_1 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{m}{2\pi C_1}x = 0$$

$$(x - \frac{m}{4\pi C_1})^2 + y^2 = (\frac{m}{4\pi C_1})^2$$

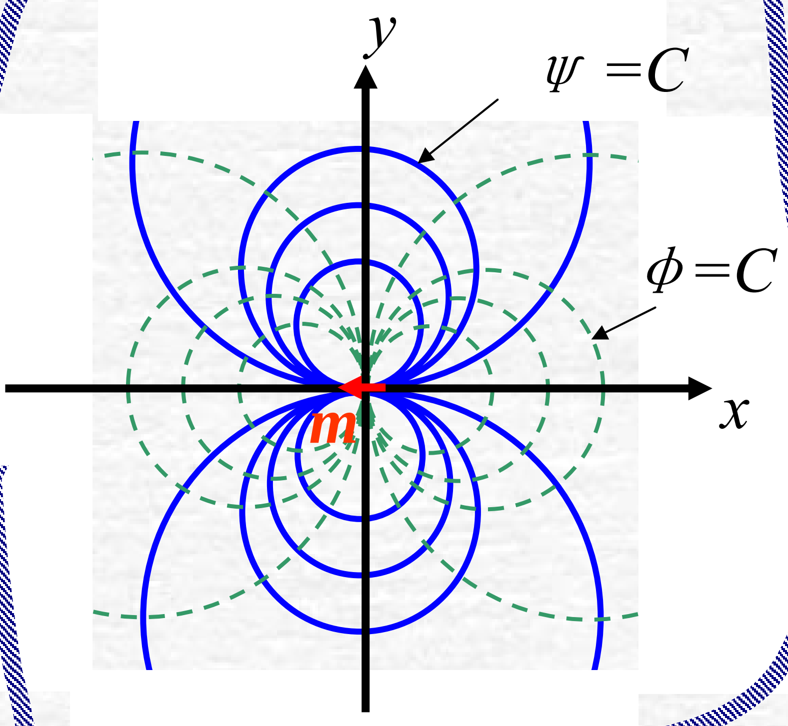
圆心在 x 轴上与 y 轴相切的圆

偶极子的流线

$$\psi = C_2 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{m}{2\pi C_1}y = 0$$

$$x^2 + (y + \frac{m}{4\pi C_2})^2 = (\frac{m}{4\pi C_2})^2$$

圆心在 y 轴上与 x 轴相切的圆



- 直线等速流动 + 平面点源

$$\varphi = Ur\cos\theta + \frac{q}{2\pi}\ln r$$

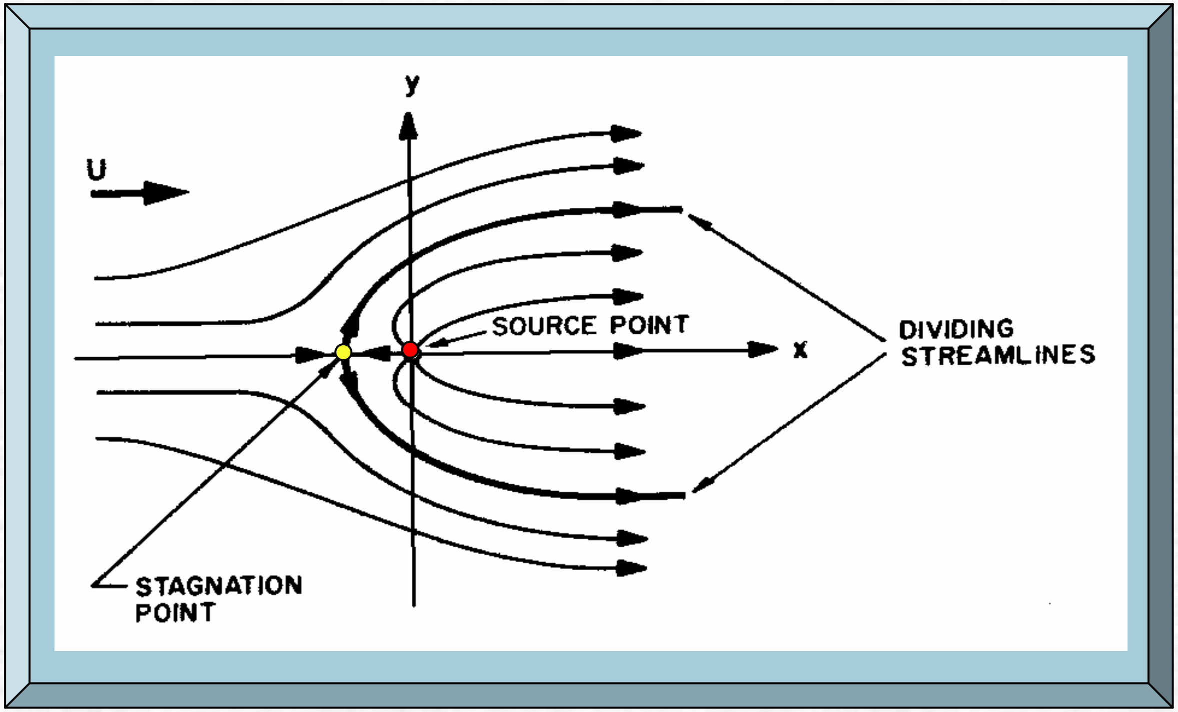
$$\psi = Ur\sin\theta + \frac{q}{2\pi}\theta$$

零流线

$\theta = 0$ ➡ $\psi = 0$

驻点 $\left(-\frac{q}{2\pi U}, 0\right)$

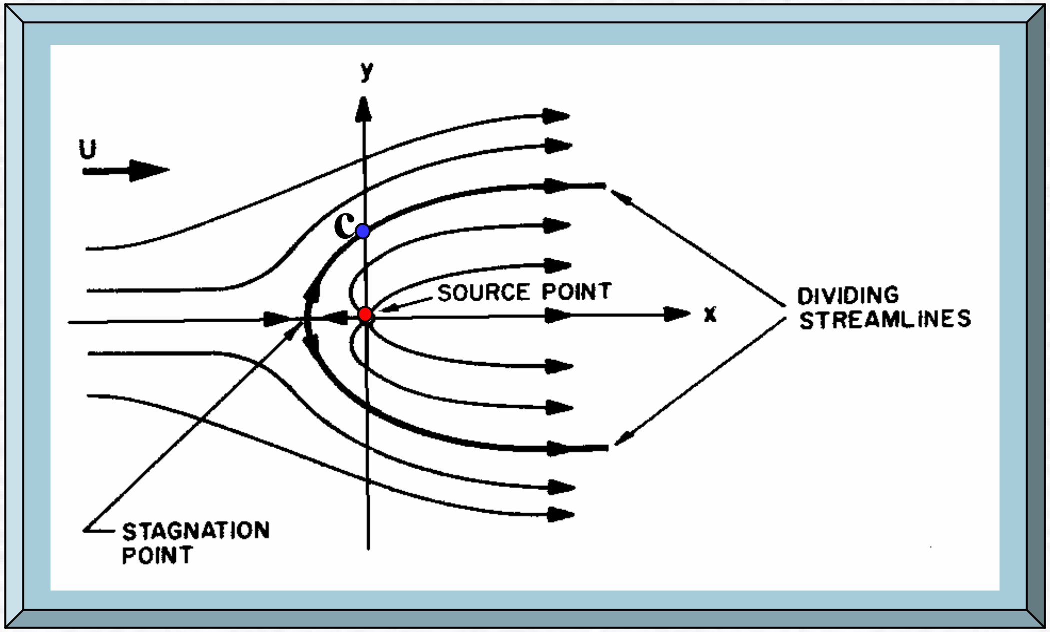
过驻点流线的流线常数 $\psi = \frac{q}{2}$



（上半段，θ 取 0 – π）

过驻点流线

$$\frac{q}{2} = Ur\sin\theta + \frac{q}{2\pi}\theta$$



θ = π/2 代入，得

$$r_C = \frac{q}{4U}$$

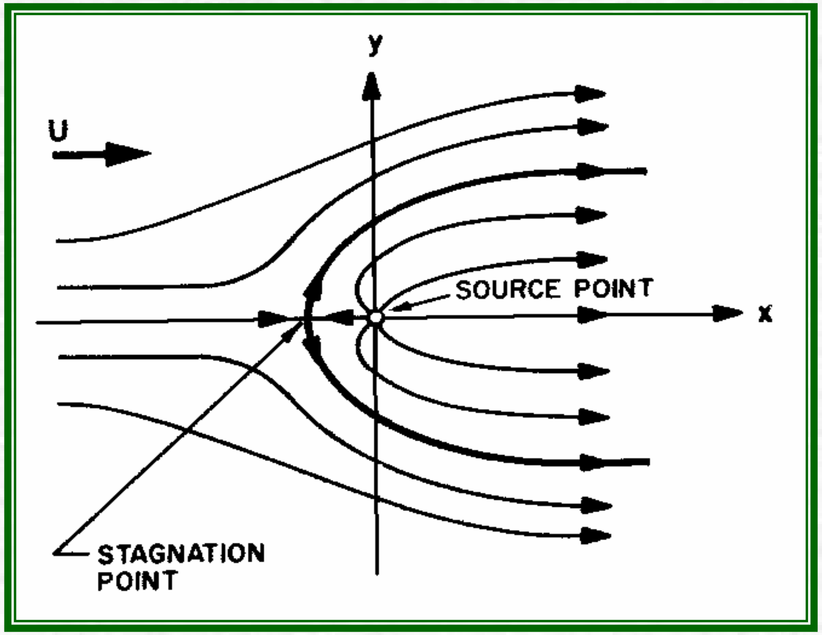
θ → 0

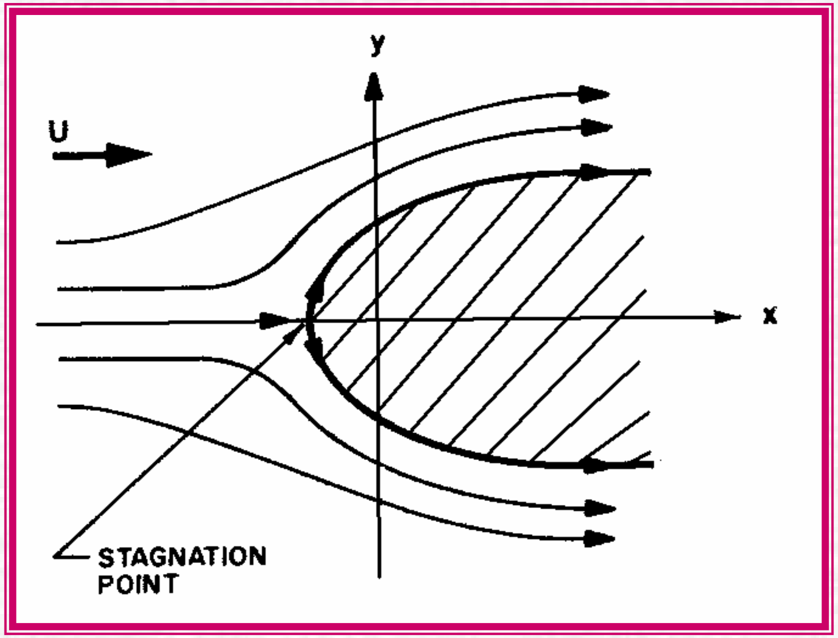
$$r\sin\theta \to \frac{q}{2U}$$

过驻点流线在下游无穷远处开口宽度 $\frac{q}{U}$

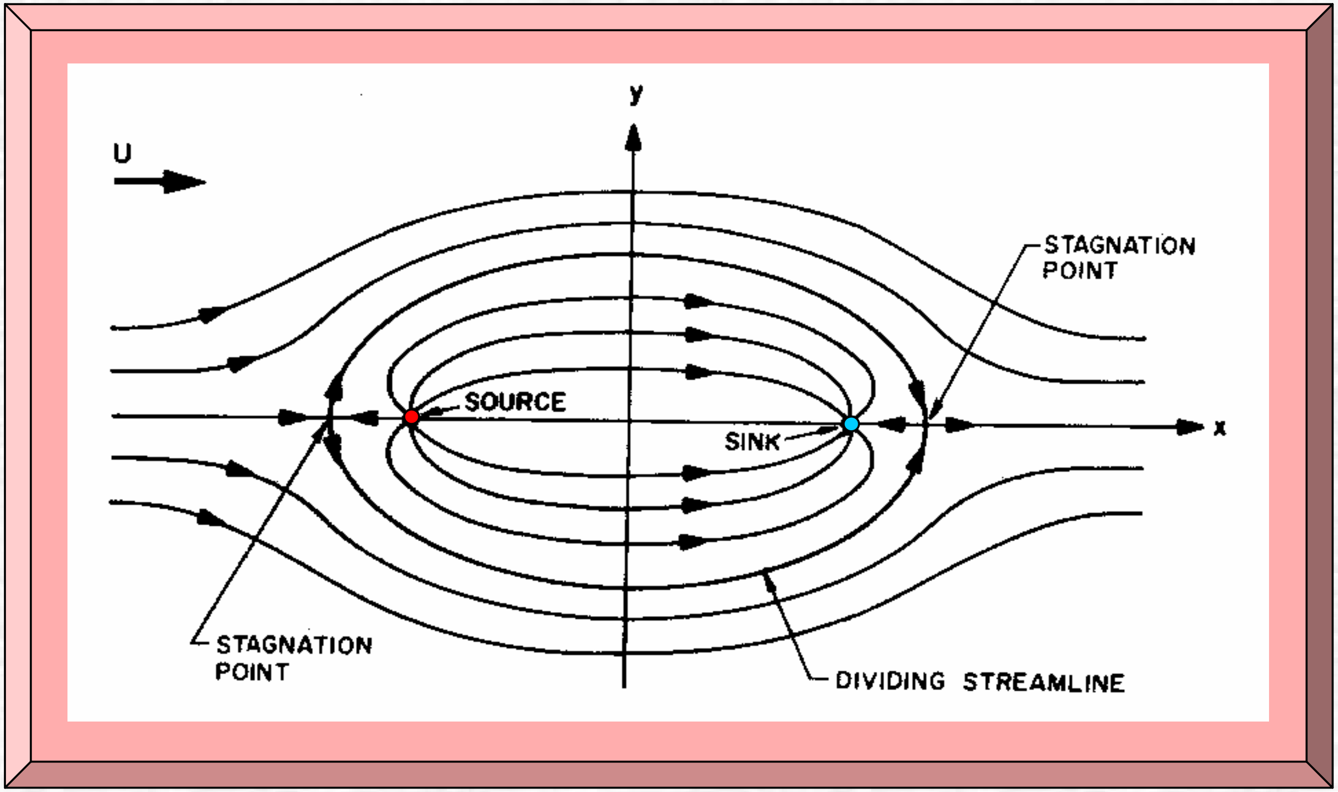
流线与固壁的等价原理

设想用一刚性薄片按上述过驻点流线的形状弯成柱面，从垂直于流动平面的方向插入流场，将不会影响内外两部分流场的流动。这就是流线与固壁的等价原理。若按过驻点流线的形状制成半无穷柱体放入流场相应位置，取代点源，此时内部流动将不再存在，但外部流动仍不会改变。所以点源对等速直线流动的影响与这个半无穷柱体对等速直线流动的影响是等价的。上面我们得到的流场也就是等速直线流动绕过半无穷柱体的绕流解。从这个意义上讲，点源这个抽象的流动变成了一个具体、实在的概念。


y
U
SOURCE POINT
x
STAGNATION
POINT


y
U
x
STAGNATION
POINT

- 直线等速流动 + 一对平面源汇



一对平面源汇

偶极子

如何？

过驻点流线封闭，呈扁平的卵形。

- 直线等速流动 ＋ 偶极子

$$\varphi = Ur\cos\theta + \frac{m}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

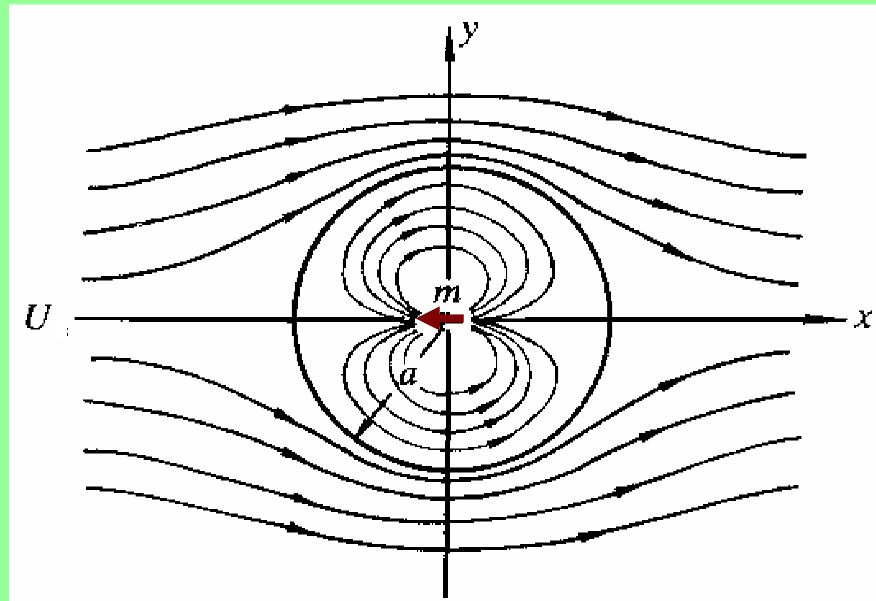
$$\psi = Ur\sin\theta - \frac{m}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}$$

零流线

$\theta = 0$ → $\psi = 0$

$\theta = \pi$ → $\psi = 0$

$$r = \sqrt{\frac{m}{2\pi U}} \equiv a$$



代表绕圆柱 $r = a$ 的绕流

圆柱和偶极子的等价性

$a = \sqrt{\dfrac{m}{2\pi U}}$

圆柱面 $r = a$ 上的速度分布

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = -\left.\dfrac{\partial \psi}{\partial r}\right|_{r=a} = -U\sin\theta - \dfrac{m}{2\pi a^2}\sin\theta = -2U\sin\theta \end{cases}$$

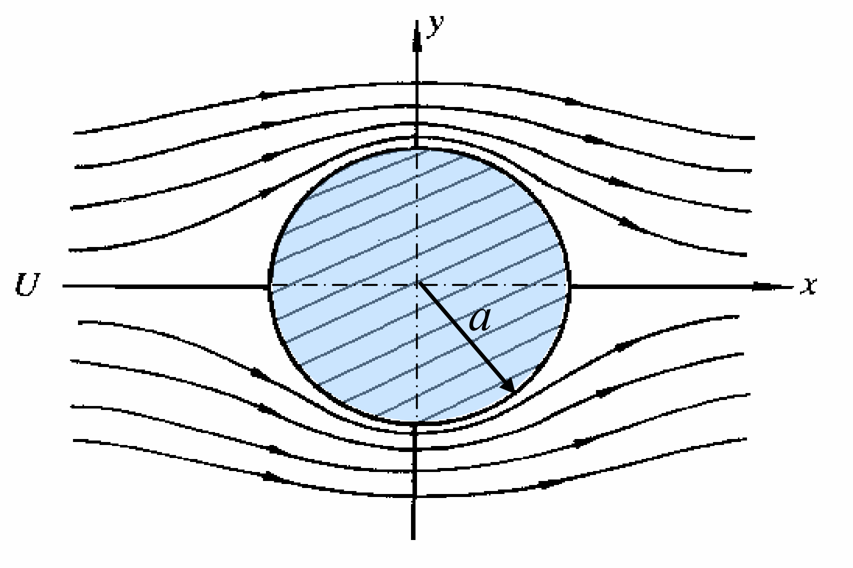
圆柱面 $r = a$ 上的压强分布

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}U^2(1-4\sin^2\theta)$$

无量纲表达

$$C_p = \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1-4\sin^2\theta$$

圆柱上的压强分布上下、左右都对称



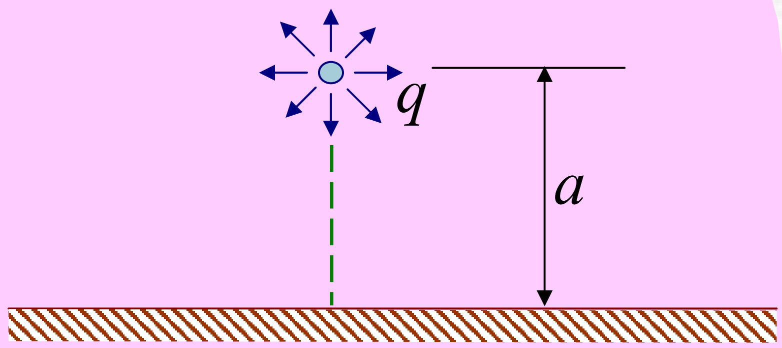
圆柱在绕流中不受力，缘由是理想流体假设

无环量圆柱绕流是一个重要的平面有势流动，圆柱对来流的作用完全可以由一个适当的偶极子来代替。

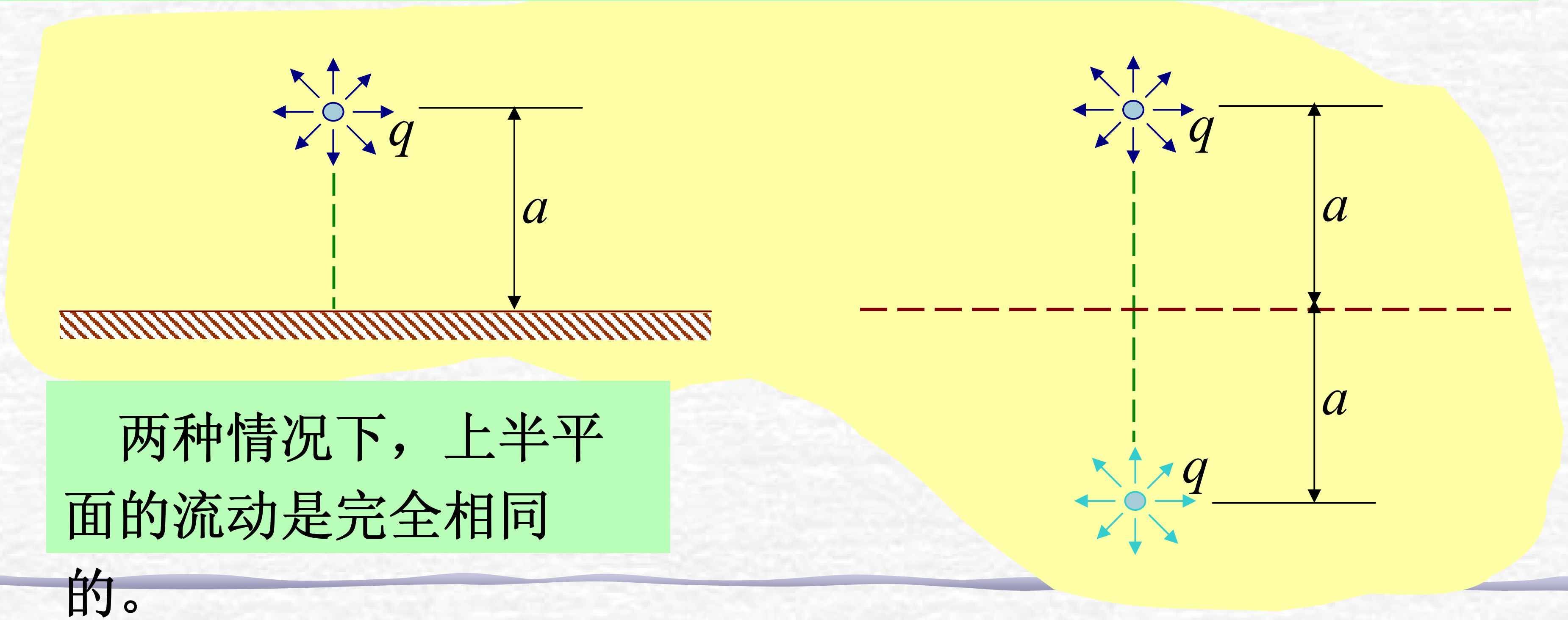
在无环量圆柱绕流解的基础上再叠加一个绕圆柱的环量，即在原点加上一个平面点涡，易知圆柱面仍是流线，形成有环量的圆柱绕流。此时，圆柱面上的速度大小和压强分布不再是上下对称的了，因此引起升力。

三. 平面壁镜像法

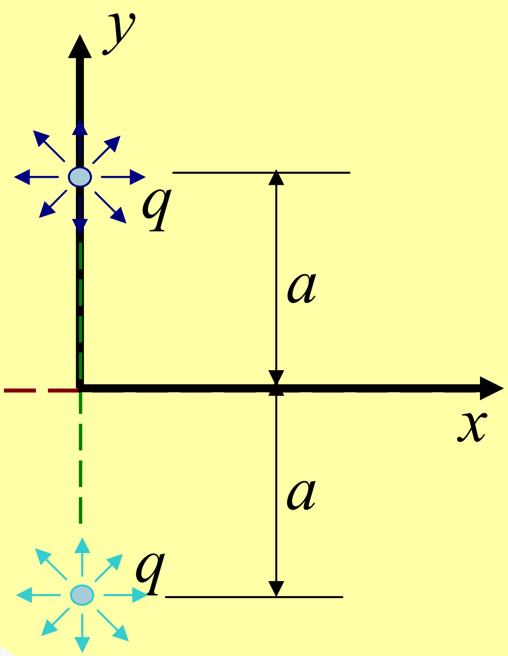
平面壁镜像法可以使不可压流体平面有势流动的奇点分布解法得到进一步的扩展。前面我们讨论的都是在无界域（整个流动平面充满流体）中放置的奇点解，不能直接用于固壁一侧的半平面流体区域中放置奇点的情况，而借助于平面壁镜像法就可以解决这个问题。



不妨以上半平面流体区域放置孤立奇点为例，探讨固壁 x 轴对流动的影响。按照流线与固壁的等价原理，将流场延拓到下半平面，并在下半平面与原奇点关于 x 轴对称的位置放置同样的奇点，使延拓后的全平面流场中 x 轴成为一条流线，这样新加的奇点对原奇点的影响就取代了固壁 x 轴的作用。



两种情况下，上半平面的流动是完全相同的。



$$\varphi=\frac{q}{2\pi}\left(\ln\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\ln\sqrt{x^2+(y+a)^2}\right)$$

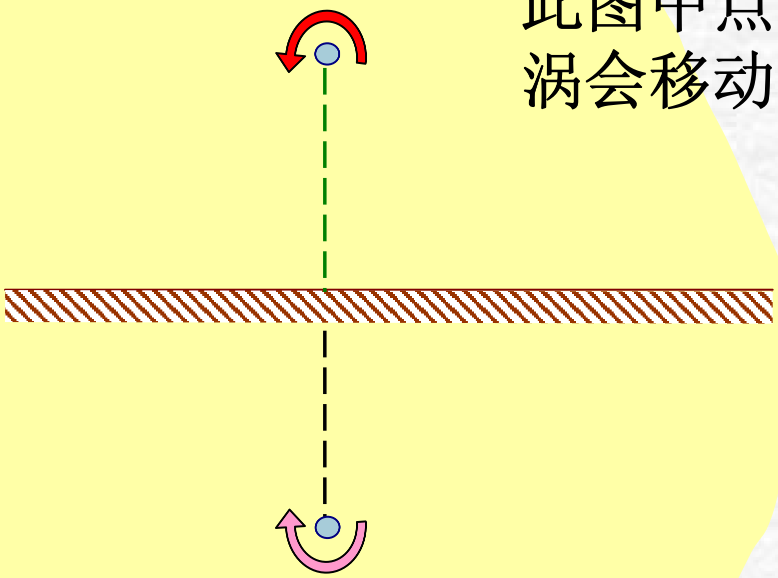
$$\begin{cases} u_x=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{q}{2\pi}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}\right) \\ u_y=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{q}{2\pi}\left(\dfrac{y-a}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}+\dfrac{y+a}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}\right) \end{cases}$$

平面问题中的一条直线，从三维角度看是无限大的平面壁，所以这样的处理方法称为平面壁镜像法。

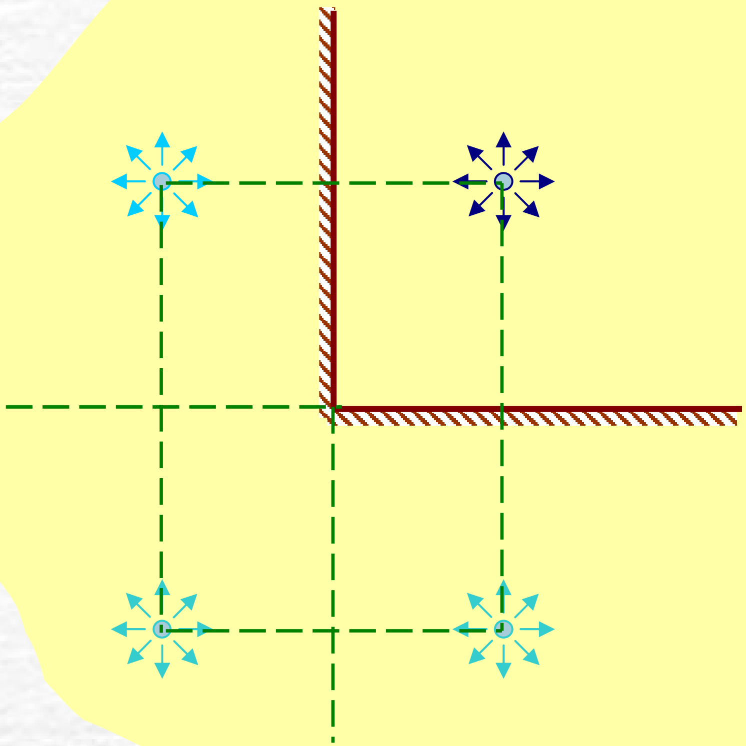
$$\begin{cases} u_x\big|_{y=0}=\dfrac{q}{\pi}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) \\ u_y\big|_{y=0}=0 \end{cases}$$

进而可求壁面上压强分布

取奇点关于平面壁的镜像时，应该把点涡和偶极子的方向也考虑进去。



此图中点涡会移动



若 x 和 y 轴都是固壁，考虑第一象限内放置奇点的流动，可推广上述方法，换成在全平面内上下、左右都对称的四个奇点的流动来求解。