第四章 流体动力学基础

- 对运动流体的应力状态作进一步分析，定义应力张量，并给出应力张量和变形率张量之间的联系。建立不可压缩流体运动微分方程 — N-S 方程。

- 对理想流体运动微分方程 —— 欧拉方程在恒定条件下沿流线积分得到恒定元流的能量方程 —— 伯努利方程，进而推广到总流，得到恒定总流的能量方程。

- 将动量守恒定律用于恒定总流得到恒定总流的动量方程。

水力学课程重点

三大守恒定律		恒定总流三大方程
质量守恒	→	连续方程
能量守恒	→	能量方程
动量守恒	→	动量方程

第四章 流体动力学基础

§4—1 运动流体的应力状态

§4—2 流体运动微分方程

§4—3 恒定总流的能量方程

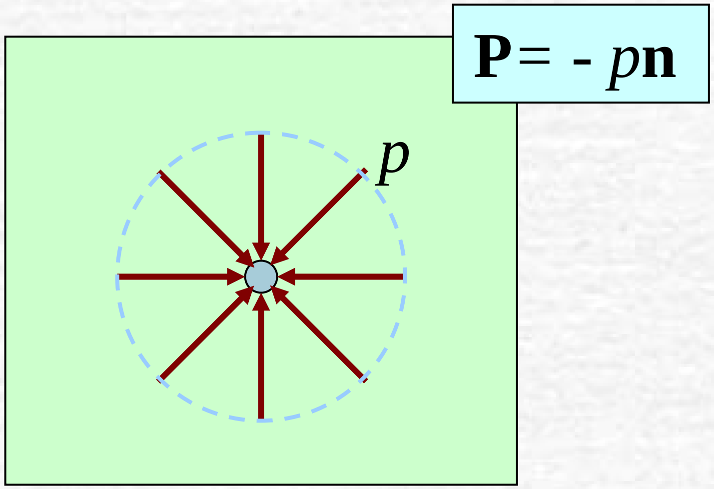
§4—4 恒定总流的动量方程

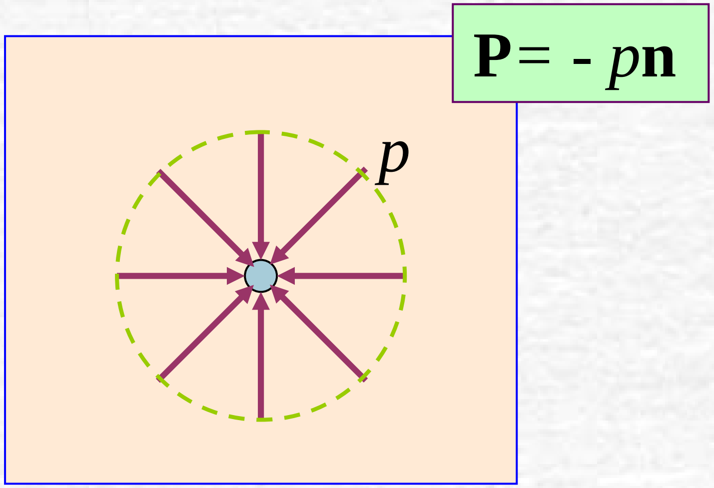
§4—5 求解恒定总流问题的几点说明

§ 4—1 运动流体的应力状态

- 静止流体（不论理想或实际流体）

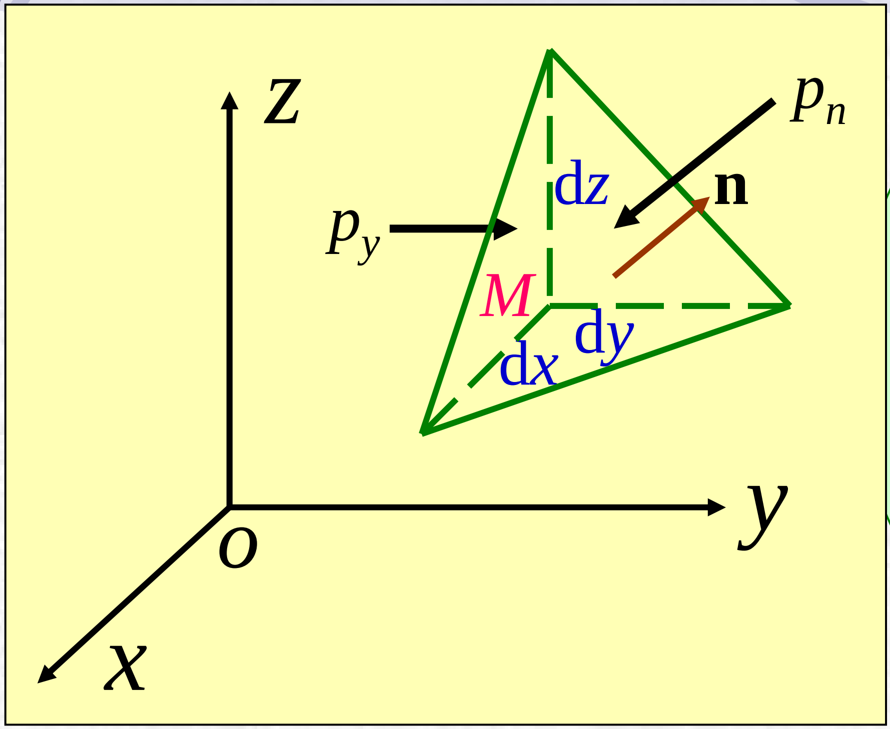
- 运动理想流体





p： 静压强

p： 动压强



• 静止流体和运动理想流体中的四面体微元运动方程中质量力（含惯性力）比起表面力是高阶无穷小，当四面体微元趋于一点，即可得证

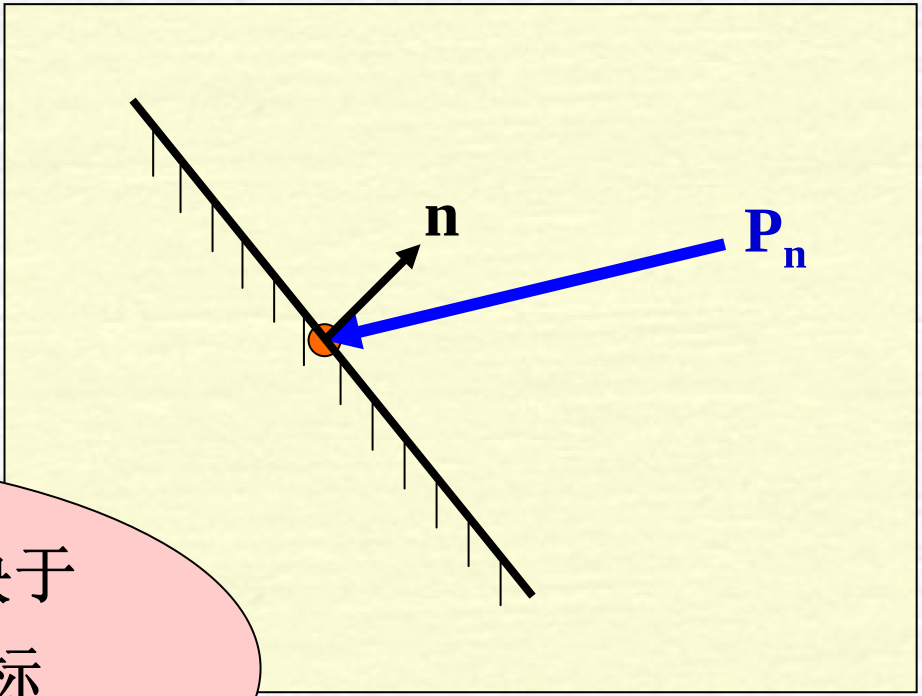
$$\boxed{p_n = p_y}$$

静止流体 $p_y \,\mathrm{d}A_y - p_n \,\mathrm{d}A_n \cos(\mathbf{n},\mathbf{y}) + \rho Y \,\mathrm{d}V = 0$

运动理想流体 $p_y \,\mathrm{d}A_y - p_n \,\mathrm{d}A_n \cos(\mathbf{n},\mathbf{y}) + \rho Y \,\mathrm{d}V - \rho \dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V = 0$

- 运动实际流体

应力四要素：点、面、侧、分量方向。



一点处的应力 p_n 取决于作用面法向，所以脚标中须加上 **n**

• 应力分量

$\mathbf{p_n}$ 分量形式 (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz})

脚标含义：前一个表示作用面方向；后一个表示应力分量之投影方向。

p_{xy} 的含义：

法向为 ***x*** 轴正方向的作用面上的应力在 ***y*** 方向的分量。（**切应力**）

p_{xx} 的含义：

法向为 ***x*** 轴正方向的作用面上的应力在 ***x*** 方向的分量。（**法应力**）

- 应力张量

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}$$

应力张量九个量组成的二阶张量

主对角线上的三个元素是法应力分量，其它是切应力分量。

法应力为正表示受拉

可以证明这个张量是对称的，只有六个独立的分量。

- 任意方位作用面上的应力

有了应力张量 **[P]**，任意方位作用面上的应力都可知道，为：

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot[\mathbf{P}]$$

例如法向为 **n** 的作用面上应力的 *y* 方向的分量

$$p_{ny} = p_{xy}n_x + p_{yy}n_y + p_{zy}n_z$$

运动流体的应力状态可由应力张量来描述。

• 流体的动压强

应力张量主对角线上三个元素之和是坐标变换中的不变量，即其值不随坐标轴的转动而改变，任意三个相互垂直的作用面上的法应力之和都是相同的。

定义

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$$

流体的动压强

流体的动压强由场点唯一对应，而与作用面的方位无关。所以运动流体中存在一动压强场，它是数量场。要注意 $\boldsymbol{p}$ 并非任意方位作用面上真正的压应力 $-p_{nn}$

• 广义牛顿内摩擦定律

牛顿内摩擦定律 $\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$

推广

$$[\mathbf{P}] = 2\mu[\varepsilon] - p[\delta]$$

各向同性的不可压缩牛顿流体的应力和变形速率之间存在线性关系

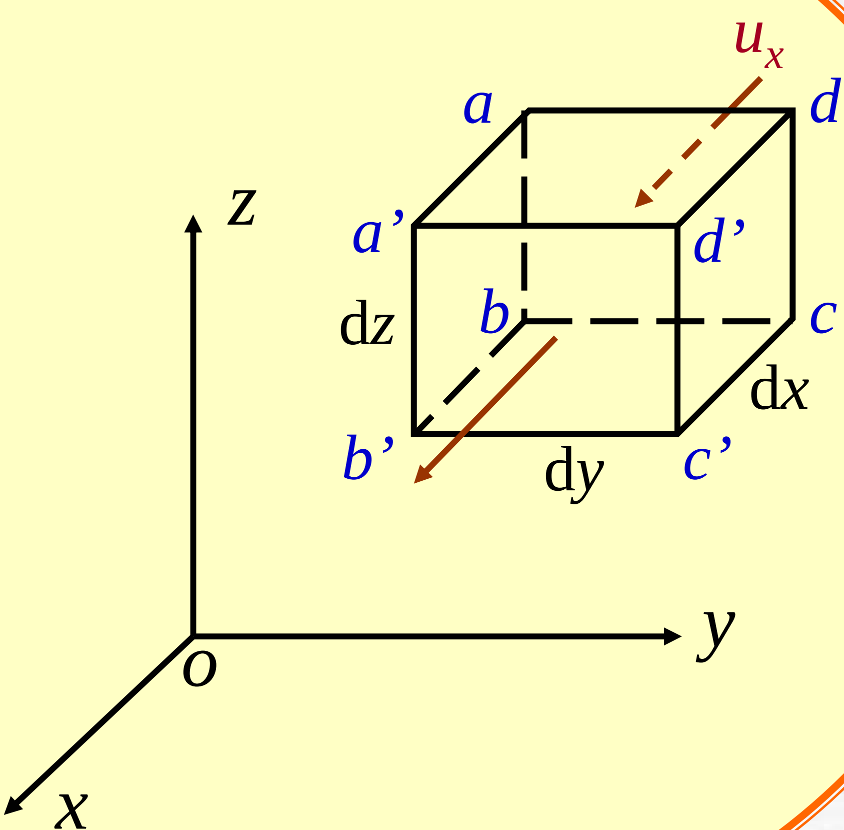
广义牛顿内摩擦定律

§4—2 流体运动微分方程

理论基础是动量守恒定律，讨论在欧拉观点下进行。

按照欧拉观点表述动量守恒定律：单位时间控制体内动量的增加必等于单位时间净流入控制体的动量加上控制体内流体所受合力。

一．以应力表示的流体运动微分方程



- 单位时间 里，从 *abcd* 面流入微元体的流体质量为

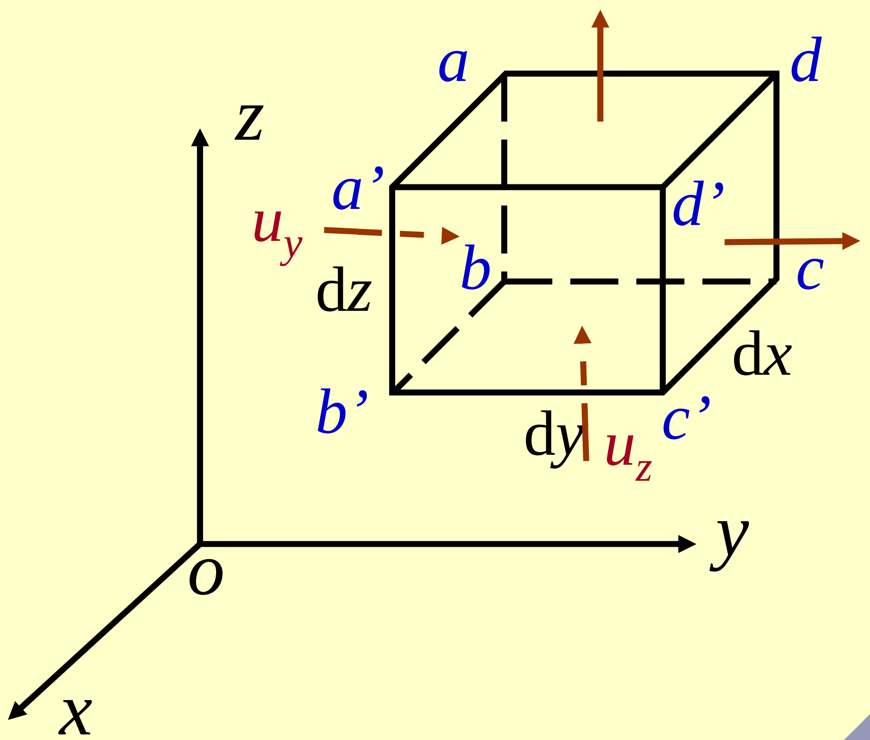
$$\rho u_x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

流入微元体的 x 方向的动量为

$$\rho u_x u_x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

从 *a'b'c'd'* 面流出的 x 方向的动量为

$$\left[\rho u_x u_x + \frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$



净流入前后这一对表面的 x 方向的动量为

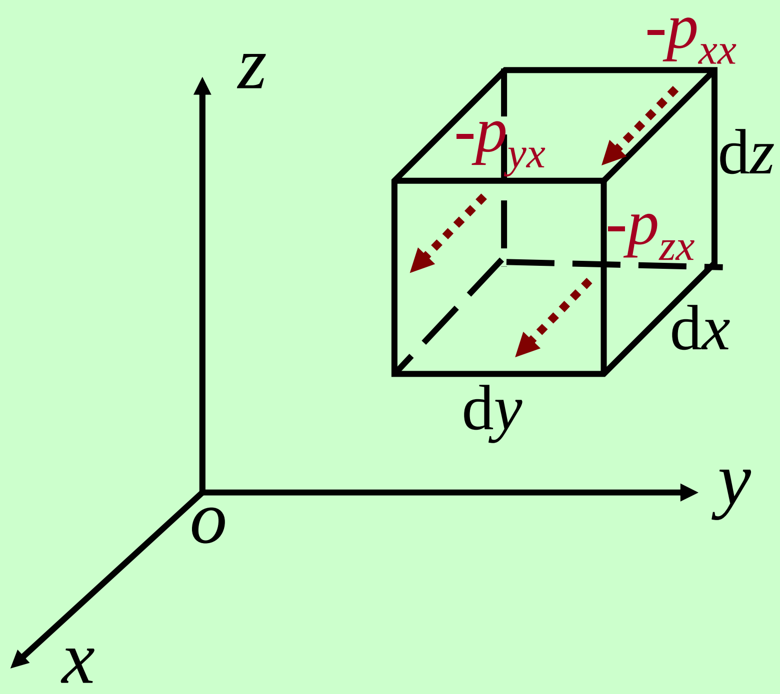
$$-\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

同理可知，在单位时间里，沿着 y 方向和 z 方向净流入左右和上下两对表面的 x 方向的动量分别为

$$-\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

和

$$-\frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



- 作用于六面体表面沿 x 方向的表面力有：

前后一对面元法向力

$$-p_{xx}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

左右一对面元切向力

$$-p_{yx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+(p_{yx}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

上下一对面元切向力

$$-p_{zx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(p_{zx}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

相加得沿 x 方向的总表面力

$$(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

- 根据动量守恒原理

- 作用于六面体微元沿 ***x*** 方向的质量力为

$$\rho X\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- 单位时间微元内 ***x*** 方向动量的增加为

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

动量增加

流入动量

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-[\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\rho X\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

质量力

表面力

整理得

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}+[\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}]=\rho X+(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z})$$

左边等于

$$\rho[\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}] \Rightarrow \rho\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}$$

$$+u_x[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}] \Rightarrow 0$$

由连续方程知

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=X+\frac{1}{\rho}(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z})}$$

- 以应力表示的流体运动微分方程

方程组不封闭

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = X + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right) \\
\dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = Y + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right) \\
\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = Z + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)
\end{cases}
$$

二. 不可压缩粘性流体的运动微分方程——N-S方程

将广义牛顿内摩擦定律 $[\mathbf{P}] = 2\mu[\varepsilon] - p[\delta]$ 代入得

$$
\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = X + \frac{1}{\rho}\left[\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right]
$$

$$
= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)
$$

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2\equiv\nabla\cdot\nabla\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nu\nabla^2 u_x \qquad\qquad 0$$

不可压

拉普拉斯算子

对跟随其后的量求调和量

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u_x}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u_x \\
\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 u_y \\
\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 u_z
\end{aligned}\right.$$

方程组封闭

矢量形式

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u}$$

时变惯性力

位变惯性力

质量力

压差力

粘性力

三. 理想流体的运动微分方程——欧拉方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_x}{\partial z}=X-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}\\ \dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_y}{\partial z}=Y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}\\ \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=Z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}\end{cases}$$

矢量形式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p}$$

时变惯性力

位变惯性力

质量力

压差力

- 流体静止时，只受质量力、压差力的作用，运动方程退化为欧拉平衡方程

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

四．流体动力学定解问题和解法概述

基本微分方程组

微分形式流体运动方程连同连续方程，形成对流体运动的基本控制方程组，是求解流速场和压力场的理论基础。四个方程可求四个未知量：p 和 $\mathbf{u}$ ，方程组是封闭的。但由于运动方程是二阶偏微分方程，其中的位变惯性力（常称为对流项）是非线性的，解析求解非常困难。

解法概述

- 只有在极少数简单流动的情况下，**N-S**方程才有解析解。而绝大部分流动都不能直接对 **N-S** 方程解析求解，我们只能抓住问题的主要方面，作相应的简化，才能进行进一步的解析处理。

- 忽略粘性，作理想流体假设，从流动的维数上作简化，都是常见的手段。如果流动是有势流动，解析处理就有更多的便利条件。后面我们就将分门别类地对各种流动进行求解方法的讨论。

- 各种简化都是在基本方程的基础上进行的，所以深入理解方程中各项的物理意义是非常重要的。

初始条件和边界条件

流体动力学定解问题 → 流体运动基本方程 + 初始条件边界条件

流动共性　　　　体现个性

- 初始条件是对非恒定流动指定初始时刻流场的速度和压强分布。

- 边界条件是指运动方程的解在流场的边界上必须满足的运动学和动力学条件。常见的边界条件有：固壁条件和液体的自由表面条件。

- 理想流体的固壁条件称为可滑移条件，即流体不能穿越固壁，但可有切向相对运动，所以

$$u_n = U_n$$

- 实际（粘性）流体的固壁条件称为不可滑移条件，即附着在固壁上的流体质点与固壁不能有相对运动，所以

$$\mathbf{u=U}$$

注：以上 **u** 和 **U** 分别表示附着在固壁上的流体质点与固壁上相应点的速度。

- 液体的自由表面动力学条件为自由表面上压强为常数（大气压）。

五. 理想流体的运动微分方程的积分

- 运用上面得到的运动微分方程求解各种流动问题时，需要对运动方程进行积分，但由于数学上的困难，目前还无法在一般情况下进行。下面先讨论在恒定条件下理想流体运动方程沿流线的积分。

理想流体

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

恒定流动

$$u_x\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \quad + \quad u_y\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}y \quad + \quad u_z\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}z$$

（dx,dy,dz) 是流线上沿流动方向一段弧长，与迹线重合。

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}u_x\,\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}u_y\,\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}u_z\,\mathrm{d}t=X\,\mathrm{d}x+Y\,\mathrm{d}y+Z\,\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$$

上式左边可改写为：

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}u_x\,\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}u_y\,\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}u_z\,\mathrm{d}t=u_x\,\mathrm{d}u_x+u_y\,\mathrm{d}u_y+u_z\,\mathrm{d}u_z=\mathrm{d}\left(\frac{u_x^2}{2}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{u_y^2}{2}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{u_z^2}{2}\right)$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right)=\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

质量力有势，势函数 **W**，即

$$X=\frac{\partial W}{\partial x},\ Y=\frac{\partial W}{\partial y},\ Z=\frac{\partial W}{\partial z}$$

则右边前三项是力势函数 **W** 的全微分

$$X\,\mathrm{d}x+Y\,\mathrm{d}y+Z\,\mathrm{d}z=\frac{\partial W}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial W}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial W}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathrm{d}W$$

右边后三项为

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p$$

不可压缩流体，密度为常数

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p=\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

最终原等式可写成

$$\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\mathrm{d}W-\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

或

$$\boxed{\mathrm{d}\left(W-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=0}$$

上式的积分为

$$W-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}=C_l$$

伯努利积分

结论

- 在理想流体的恒定流动中，同一流线上各点的

$$\left(W-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)$$

值是一个常数。其中 W 是力势函数，ρ 是不可压缩流体的密度。从推导过程看，积分是在流线上进行的，所以不同的流线可以有各自的积分常数，将它记作 C_l，称为流线常数。

重力场中的伯努利积分

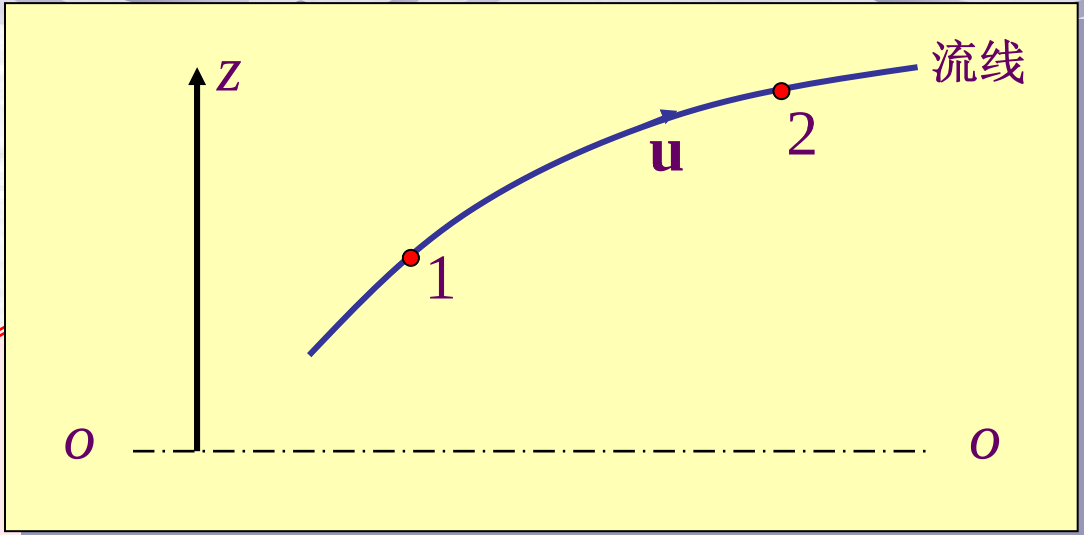
$$W = -gz$$

伯努利积分可写为

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C_l$$

或

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = C_l}$$



对同一流线上任意两点 1 和 2 利用伯努利积分，即有

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}}$$

伯努利方程

这是水力学中普遍使用的方程。

- 以上讨论了伯努利积分，其成立的条件是：理想，恒定，不可压，质量力有势。现在再加无旋（有势）条件，导出理想流体运动方程的欧拉积分。

理想

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

恒定

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

无旋

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right)=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right)=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right)=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right)=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

1 × dx

\+

2 × dy

\+

3 × dz

任意方向的弧长

质量力有势 不可压

$$\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\mathrm{d}W-\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$ 或 $$\mathrm{d}\left(W-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=0$$

积分

欧拉积分

$$W-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}=C$$

结论

- 在理想流体的恒定有势流动中，流场中各点的

$$\left(W-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)$$

值是一个常数。其中 W 是力势函数，ρ 是不可压缩流体的密度。

重力场中的欧拉积分

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=C$$

C：通用常数

表面上看，伯努利积分和欧拉积分很相似，但两者的适用条件和使用范围是截然不同的。

§4—3 恒定总流的能量方程

一．恒定元流的能量方程

伯努利积分

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=C_l$$

• 伯努利方程的物理意义

欧拉方程各项的量纲是单位质量流体受力，伯努利积分是欧拉方程的各项取了势函数而得来的，即力对位移作积分，力势函数是能量量纲，所以伯努利方程表示能量的平衡关系。

z 单位重量流体所具有的**位置势能**（简称单位位置势能）

****

$\frac{p}{\gamma}$ 单位重量流体所具有的**压强势能**（简称单位压强势能）

$z+\frac{p}{\gamma}$ 单位重量流体所具有的**总势能**（简称单位总势能）

伯努利积分

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=C_l$$

$\frac{u^2}{2g}$ 单位重量流体所具有的**动能**（简称单位动能）

****

$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}$ 单位重量流体所具有的**总机械能**（简称单位总机械能）

欧拉观点

在理想流体的恒定流动中，位于同一条流线上任意两个流体质点的单位总机械能相等。

拉格朗日观点

在理想流体的恒定流动中，同一流体质点的单位总机械能保持不变。

• 伯努利方程的几何意义

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=C_l$$

伯努利积分

伯努利积分各项都具有长度量纲，几何上可用某个高度来表示，常称作**水头**。

$\boxed{z}$ 位置水头

$\boxed{\frac{p}{\gamma}}$ 压强水头

$\boxed{z+\frac{p}{\gamma}}$ 测压管水头

$\boxed{\frac{u^2}{2g}}$ 速度水头

$\boxed{H=z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}}$ 总水头

****

总机械能不变，并不是各部分能量都保持不变。三种形式的能量可以各有消长，相互转换，但总量不会增减。

****

伯努利方程是能量守恒原理在流体力学中的具体体现，故被称之为能量方程。******************************

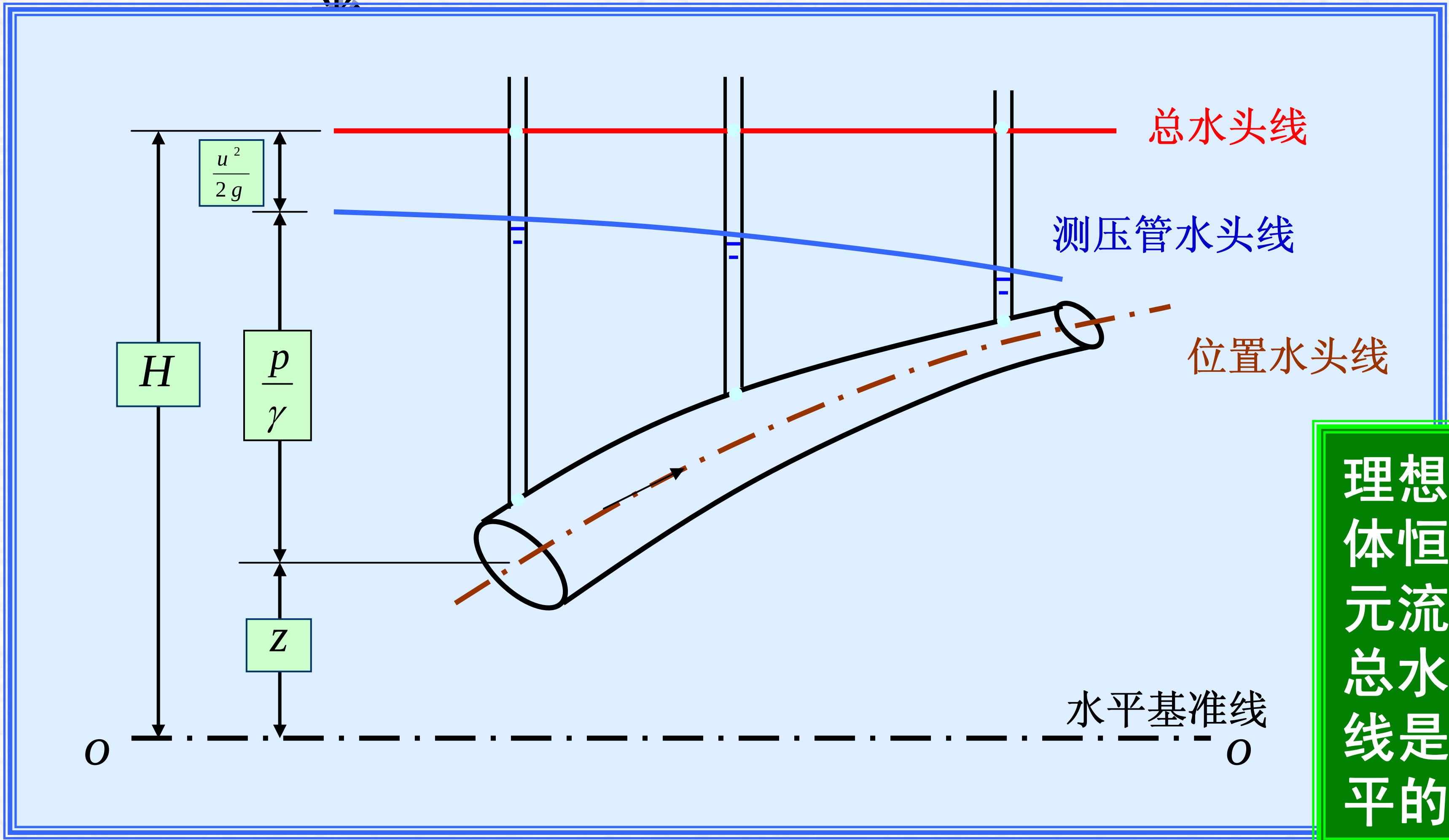
伯努利方程在流线上成立，也可认为在元流上成立，所以伯努利方程也就是理想流体恒定元流的能量方程。

****

伯努利方程可理解为：元流的任意两个过水断面的单位总机械能相等。由于是恒定流，通过元流各过水断面的质量流量相同，所以在单位时间里通过各过水断面的总机械能（即能量流量）也相等。

水头线

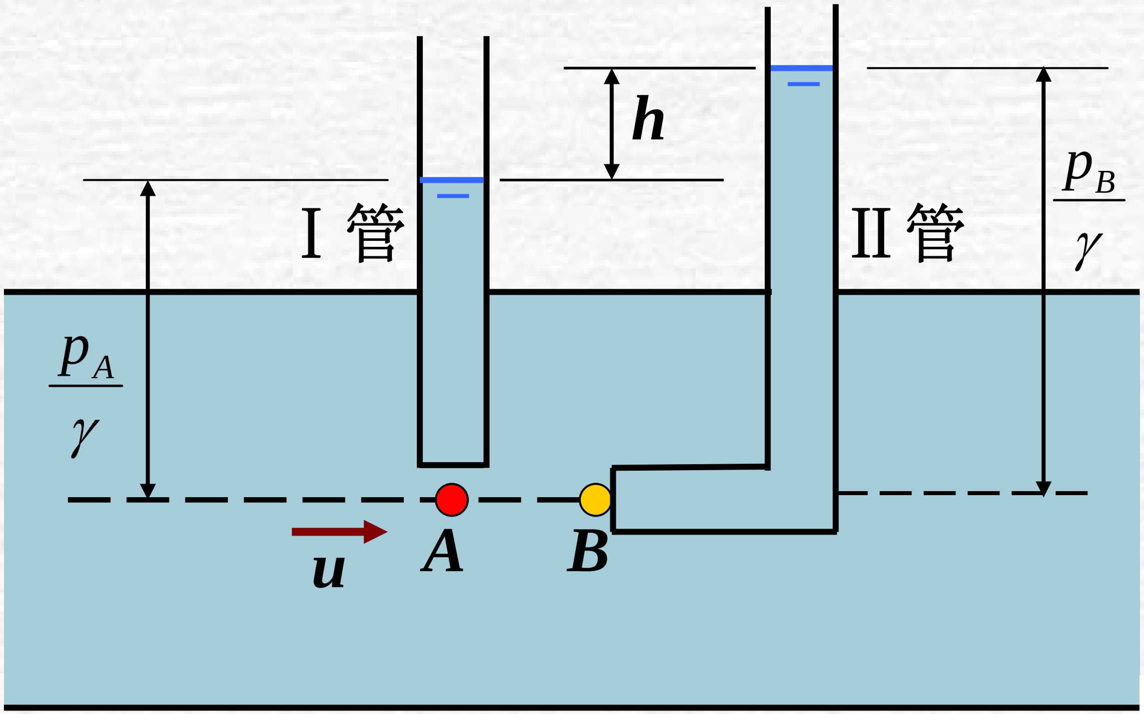
将各项水头沿程变化的情况几何表示出来



理想流体恒定元流的总水头线是水平的。

• 元流能量方程的应用举例

毕托管测速



假设 I、II 管的存在不扰动原流场。

$u_A = u$

$u_B = 0$

$z_A = z_B$

代入伯努利方程

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + 0$$

$$u = \sqrt{\frac{2g(p_B - p_A)}{\gamma}} = \sqrt{2gh}$$

Ⅰ管 —— 测压管，开口方向与流速垂直。

Ⅱ管 —— 总压管，开口方向迎着流速。

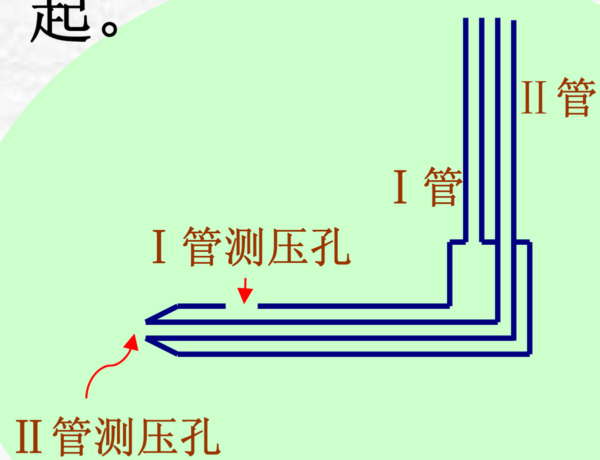
思考为什么？

****

毕托管利用两管测得总水头和测压管水头之差——速度水头，来测定流场中某**点流速**。

****

实用的毕托管常将测压管和总压管结合在一起。



实际使用中，在测得 h，计算流速 u 时，还要加上毕托管修正系数 c，即

$$u = c\sqrt{2gh}$$

动能

相互转换

势能

位置势能

压强势能

例子不胜枚举

二. 恒定总流的能量方程

理想流体恒定元流各过水断面上的能量流量相等

$$(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g})\gamma\,\mathrm{d}Q=\mathrm{const}$$

总流是无数元流的累加

理想流体恒定总流各过水断面上的**能量流量**相等

$$\iint_A(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g})\gamma\,\mathrm{d}Q=\mathrm{const}$$

****

为把总流能量方程的表达**一维化**，将测压管水头与流速水头的积分分开考虑。

$$\iint_A(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g})\gamma\,\mathrm{d}Q=\iint_A(z+\frac{p}{\gamma})\gamma\,\mathrm{d}Q+\iint_A(\frac{u^2}{2g})\gamma\,\mathrm{d}Q$$

解决测压管水头的积分 → 寻求平均测压管水头 → 考察均匀流的过水断面上测压管水头的分布情况

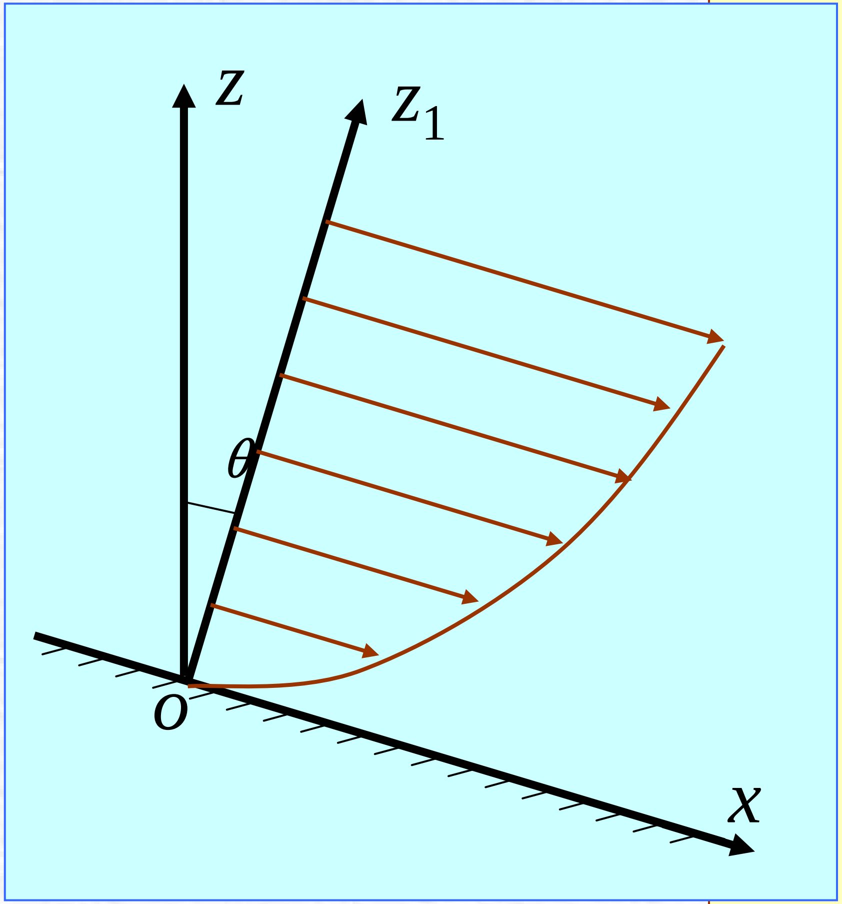
恒定均匀流运动方程中只有重力、压差力和粘性力（因以后要将能量方程扩展到实际流体，故在此不作理想流体假设），为

$$-g\mathbf{k}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{u}=0 \quad 或 \quad -\nabla\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)+\nu\nabla^2\mathbf{u}=0$$

****

z 轴为铅垂向上的坐标轴，不能移作别用。

均匀流的流线是平行直线，流速都沿着同一方向，其过水断面是平面，取直角坐标系：x 轴为流速方向，y 轴和 z_1 轴在过水断面所在平面上，其中 y 轴水平。



运动方程的分量式

$$-\frac{\partial}{\partial x}(gz+\frac{p}{\rho})+\nu\nabla^2 u_x=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial y}(gz+\frac{p}{\rho})=0$$

$$-g\cos\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z_1}=0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial z_1}(gz+\frac{p}{\rho})=0$$

从上面的后两式可以看出，在过水断面（oyz_1平面)上

$$gz+\frac{p}{\rho}=\text{const} \quad \text{或} \quad \boxed{z+\frac{p}{\gamma}=\text{const}}$$

均匀流的过水断面上测压管水头是常数

均匀流的过水断面上粘性力的分量为零，只有压差力与重力之间的平衡，所以动水压强按静水压强的规律分布。

^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^

只能在同一过水断面上应用上述结论，因为 x 方向的运动方程里有粘性力项，所以沿着流动方向动水压强分布不同于静水压强，导致不同过水断面上测压管水头可能是不同的常数。

****

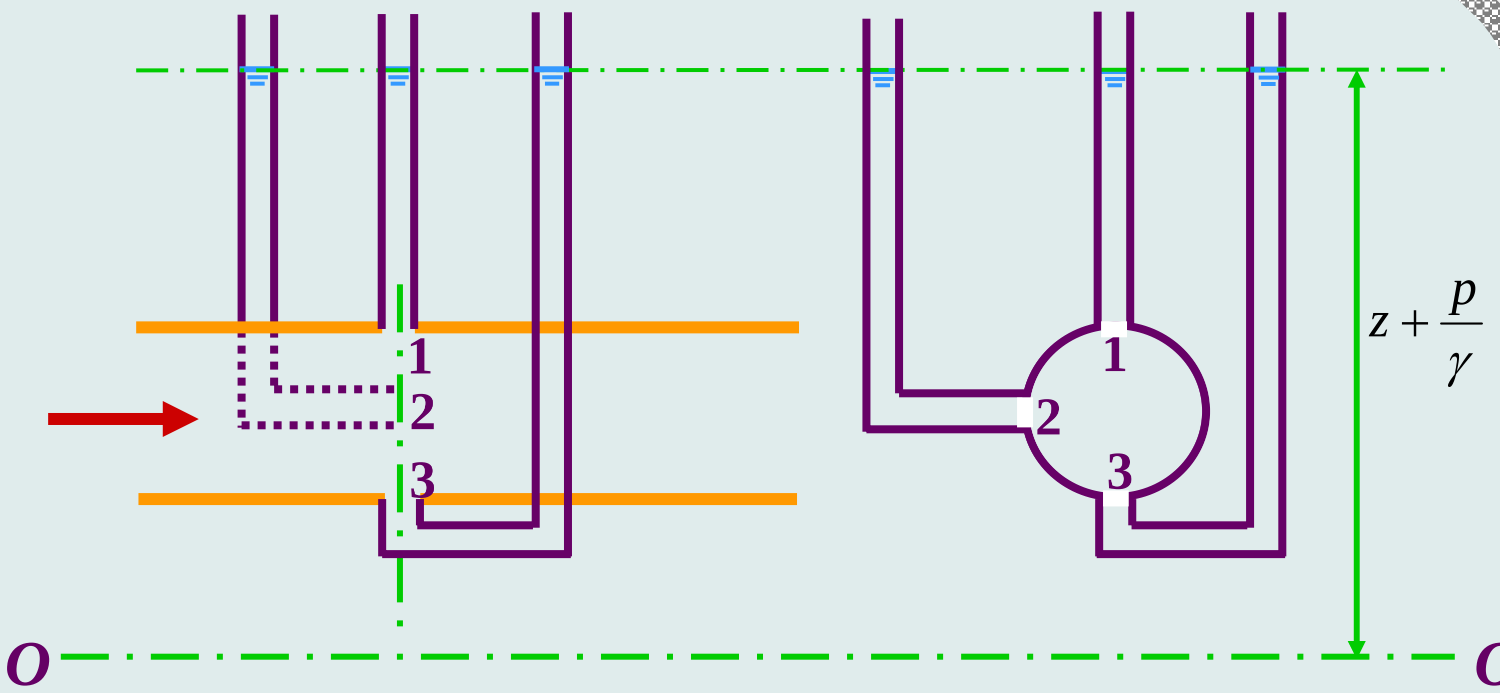
渐变流近似于均匀流，所以渐变流过水断面上的测压管水头可视为常数，任何一点的测压管水头都可以当作过水断面的平均测压管水头。

渐变流过水断面上测压管水头的积分 $\iint_A (z+\frac{p}{\gamma})\gamma \,\mathrm{d}Q = (z+\frac{p}{\gamma})\gamma Q$

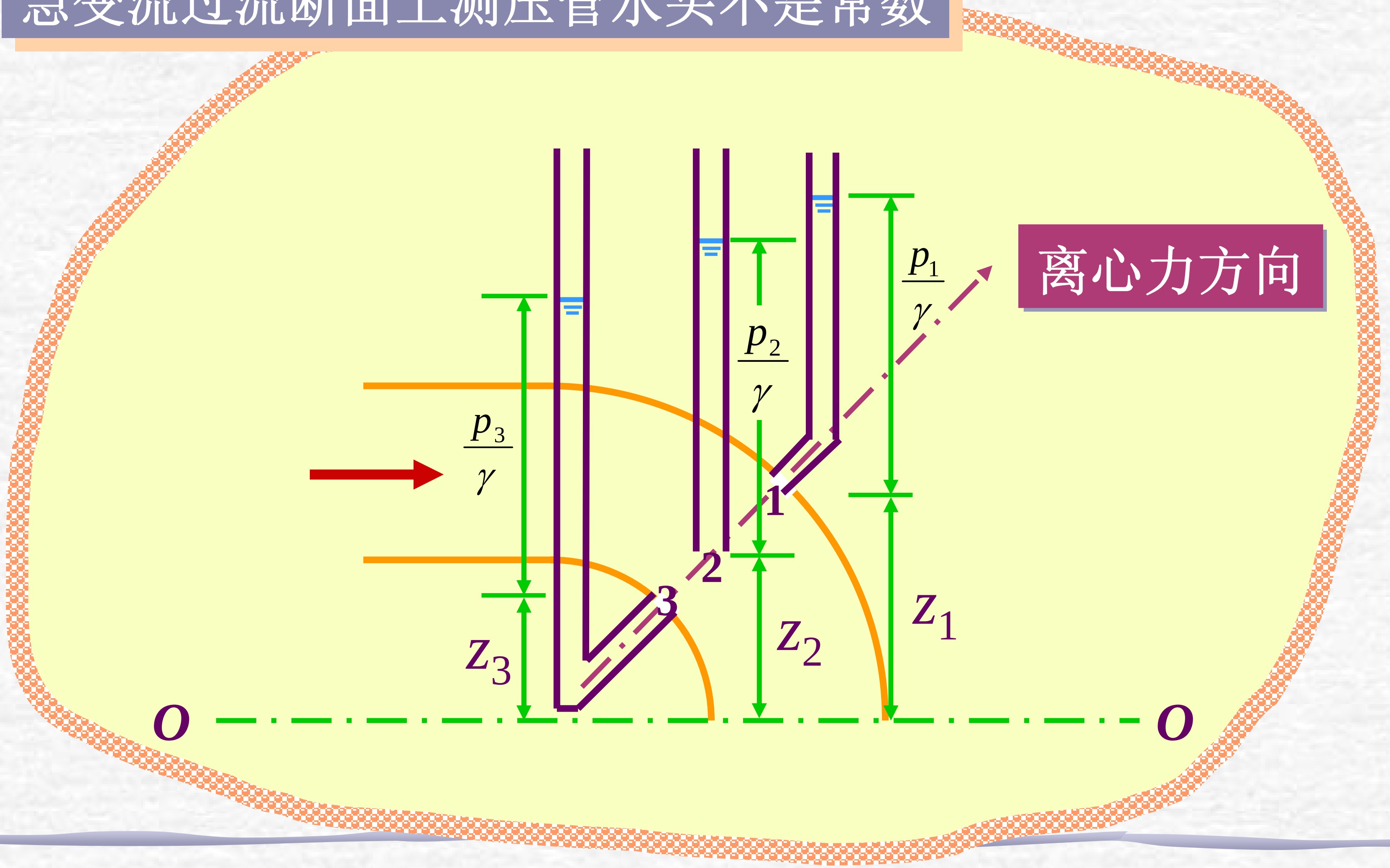
∧∧∧∧∧∧∧∧∧∧∧ ∧∧∧∧∧∧∧∧∧∧∧

急变流中同一过水断面上的测压管水头不是常数，因为急变流中，位变加速度不等于零，过水断面上有压差力、重力和惯性力的分量，不再是仅有压差力和重力相平衡的情况，惯性力也参与进来了，造成断面测压管水头不等于常数。

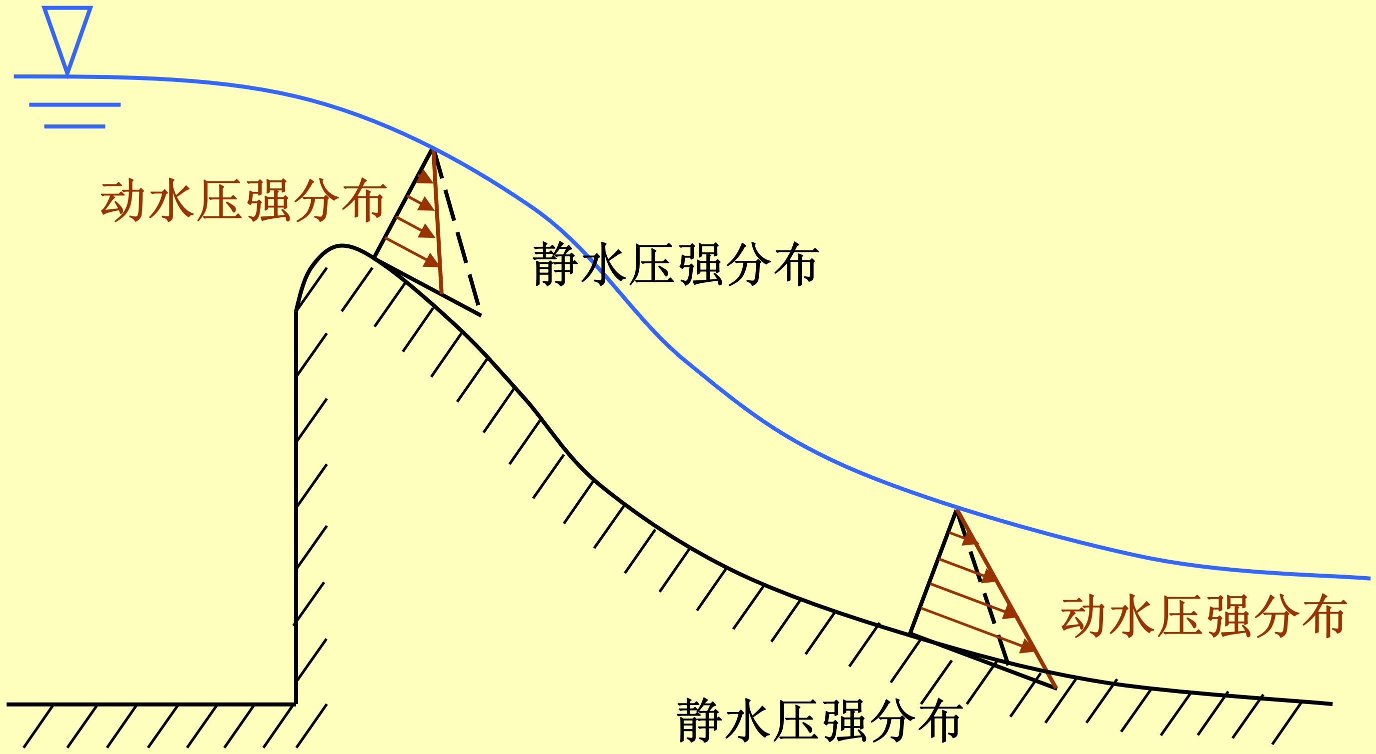
渐变流过流断面上测压管水头是常数



急变流过流断面上测压管水头不是常数



动压和静压的差提供向心力



解决速度水头的积分

用断面平均流速 v 代替 u，$\dfrac{v^2}{2g}$ 并不能作为的 $\dfrac{u^2}{2g}$ 平均值

设 $\dfrac{\alpha v^2}{2g}$ 为速度水头 $\dfrac{u^2}{2g}$ 的平均值

$$\iint_A \frac{u^2}{2g}\gamma\,\mathrm{d}Q = \frac{\alpha v^2}{2g}\gamma Q$$

$$\frac{\gamma}{2g}\iint_A u^3\,\mathrm{d}A = \frac{\gamma}{2g}\alpha v^3 A$$

$$\alpha = \frac{\iint_A u^3\,\mathrm{d}A}{v^3 A}$$

****

α 称为动能修正系数。它是一个大于 1.0 的数，其大小取决于断面上的流速分布。流速分布越均匀，越接近于 1.0；流速分布越不均匀，α 的数值越大。在一般的渐变流中的 α 值为 1.05-1.10．为简单起见，也常近似地取 α =1.0．

****

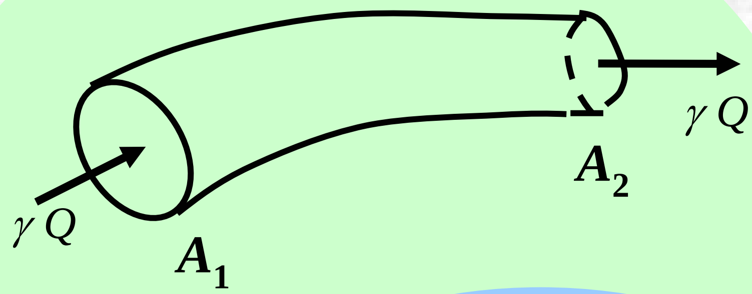
总流通过渐变流段中过水断面的能量通量为

$$\gamma Q(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{\alpha v^2}{2g})$$

断面单位重量流体的总机械能（即总水头）为

$$H=z+\frac{p}{\gamma}+\frac{\alpha v^2}{2g}$$

理想不可压流体恒定总流，流动中无机械能损耗，通过各过水断面的能量流量相同，而由连续方程决定了重量流量 γQ 沿程不变，所以在任意两个分别位于总流的渐变流段中的过水断面 A_1 和 A_2 有



$H_1=H_2$ 即

$$\boxed{z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}}$$

理想不可压缩流体恒定总流的能量方程

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

在总流能量方程的上述表达式中断面平均流速 v 、动能修正系数 α 和测压管水头 $z+\frac{p}{\gamma}$ 的取值都是由断面唯一确定的，条件是过水断面应处于渐变流段中。

完成了对恒定总流能量方程的一维化表达

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}$$

采取补上流体在流动过程中机械能损耗的方法，将理想流体的能量方程推广到实际流体。

实际流体恒定总流的能量方程

断面 $\boldsymbol{A_1}$ 是上游断面，断面 $\boldsymbol{A_2}$ 是下游断面，$\boldsymbol{h_{w1\text{-}2}}$ 为总流在断面 $\boldsymbol{A_1}$ 和 $\boldsymbol{A_2}$ 之间平均每单位重量流体所损耗的机械能，称为水头损失。水头损失如何确定，将在后面叙述。

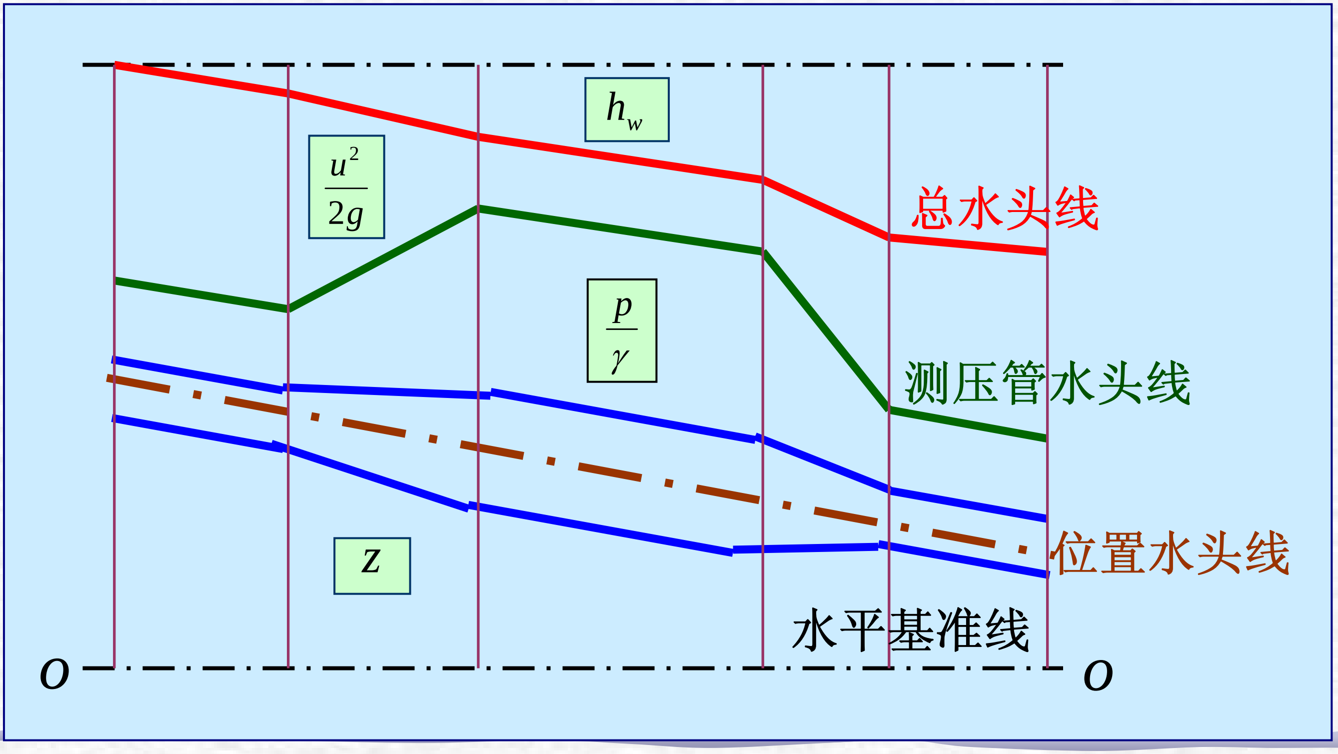
分析水力学问题最常用也是最重要的方程式

恒定总流能量方程的几何表示——水头线

与元流一样，恒定总流能量方程的各项也都是长度量纲，所以可将它们几何表示出来，画成水头线，使沿流能量的转换和变化情况更直观、更形象。

****

总流水头线的画法和元流水头线是相仿的，其中位置水头线一般为总流断面中心线。



测压管水头线可能在位置水头线以下，表示当地压强是负值。

水力坡度

实际流体的流动总是有水头损失的，所以总水头线肯定会沿程下降，将水头线的斜率冠以负号

$$J=-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}h_w}{\mathrm{d}s}$$

称为水力坡度。其中 s 是流程长度，h_w 为相应的水头损失。水力坡度表示单位重量流体在单位长度流程上损失的平均水头。

恒定总流能量方程的应用条件

（1）流动必须是恒定流，并且流体是不可压缩的。

（2）作用于流体上的质量力只有重力。

（3）所取的上下游两个断面应在渐变流段中，以符合断面上测压管水头等于常数这一条件。但在两个断面之间流动可以不是渐变流。断面应选在已知条件较多的位置。在渐变流断面上取任何一点的测压管水头值都可作为整个断面的平均值，为简便通常取管道中心点或渠道水面点。

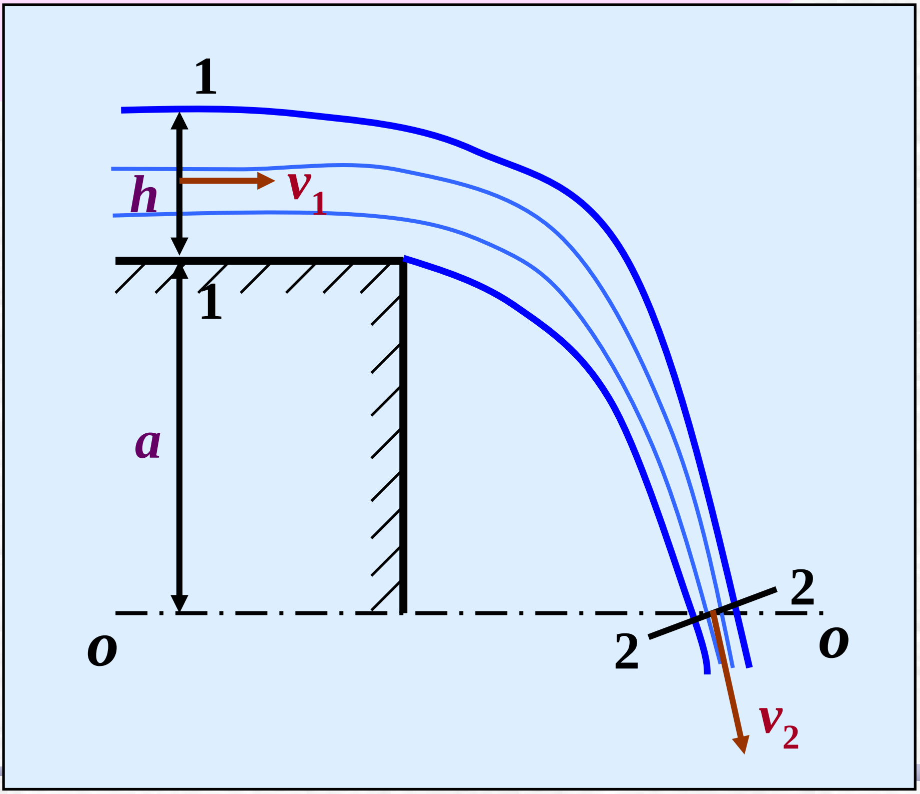
%%%%%%%%%%%%

三. 能量方程的应用举例

恒定总流能量方程表明三种机械能相互转化和总机械能守恒的规律，由此可根据具体流动的边界条件求解实际总流问题。

%%%%%%%%%%%%

先看一个跌水的例子。取顶上水深处为 1-1 断面，平均流速为 v_1，取水流跌落高度处为断面 2-2 ，平均流速为 v_2，认为该两断面均取在渐变流段中。基准面通过断面 2-2 的中心点。



写出总流能量方程

近似地取 $\alpha_1=\alpha_2=1.0$

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}$$

$z_1+\dfrac{p_1}{\gamma} = a+h$ 在水面点取值

$z_2+\dfrac{p_2}{\gamma} = 0$ 四周通大气，取断面形心处的位置水头

$h_{w1-2} = 0$ 忽略空气阻力

$$a+h+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g}$$

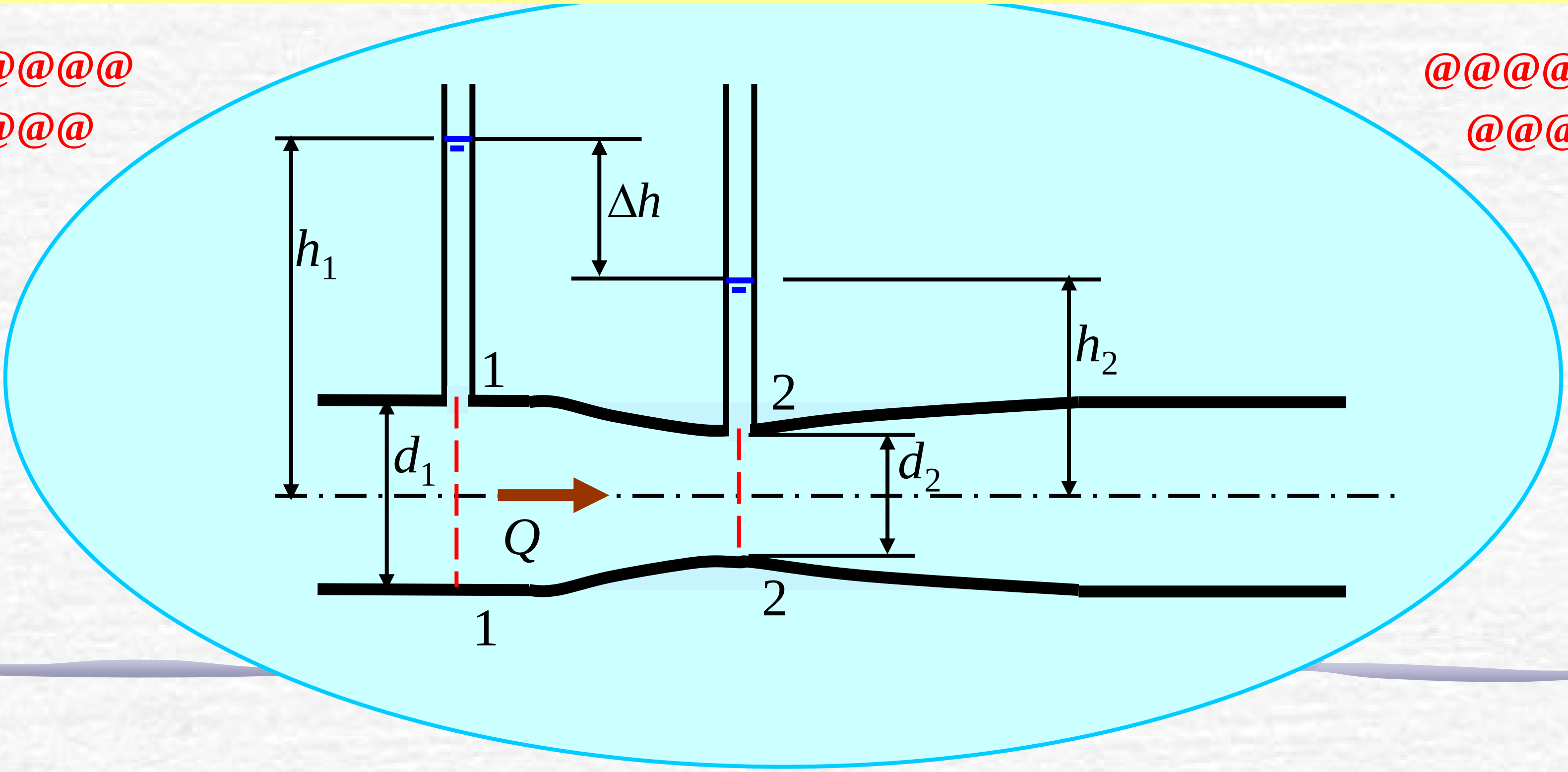
如已知 ***a***，***h***，$\boldsymbol{v_1}$，即可求出 $\boldsymbol{v_2}$

%%%%%%%%%

整股水流的水面都与大气相通，属于无压流动，因此在流动过程中我们仅看到位置势能和动能之间的转换。

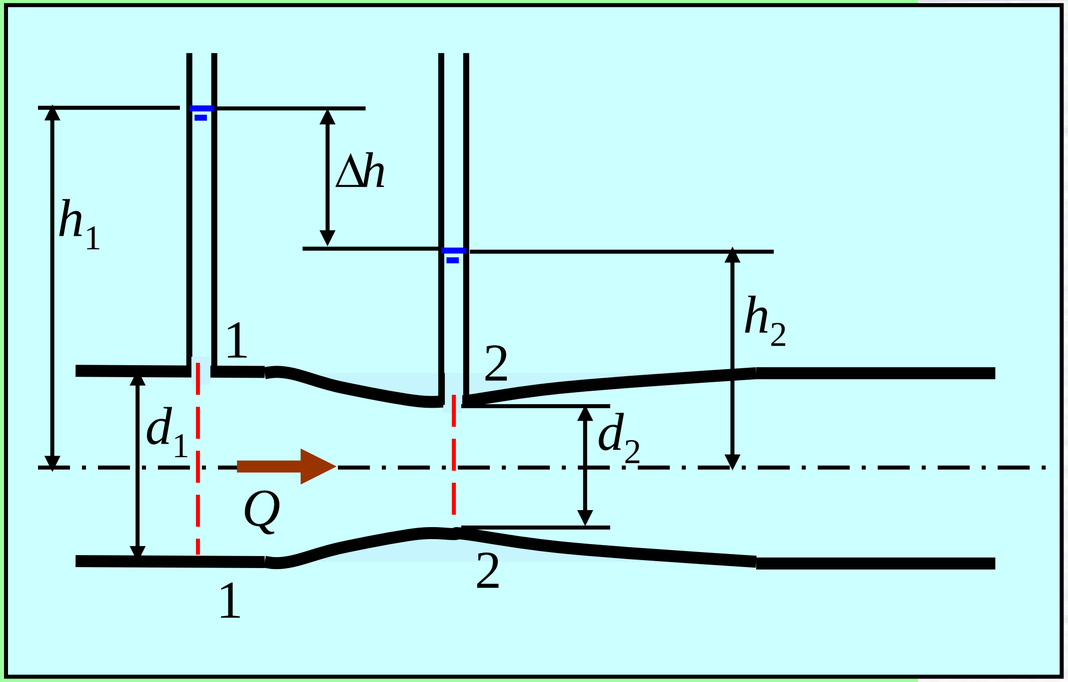
另一个例子是文透里管中的流动。文透里管是一种常用的量测管道流量的装置，它包括“收缩段”、“喉道”和“扩散段”三部分，安装在需要测定流量的管道上。在收缩段进口断面 1-1 和喉道断面 2-2 上接测压管，通过量测两个断面的测压管水头差，就可计算管道的理论流量 Q ，再经修正得到实际流量。

@@@@
@@@



@@@@
@@@

水流从 1-1 断面到达 2-2 断面，由于过水断面的收缩，流速增大，根据恒定总流能量方程，若不考虑水头损失，速度水头的增加等于测压管水头的减小，所以



$$\Delta h = h_1 - h_2 = (z_1 + \frac{p_1}{\gamma}) - (z_2 + \frac{p_2}{\gamma}) = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \approx \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

根据恒定总流连续方程又有

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad 即 \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

以上，由能量方程和连续方程得到了 v_1 和 v_2 间的两个关系式，联立求解，得

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}\sqrt{2g\Delta h}$$

理论流量为：

$$Q_{理} = v_2 A_2 = \frac{\pi}{4}\frac{d_1^2 d_2^2}{\sqrt{d_1^4 - d_2^4}}\sqrt{2g\Delta h} = K\sqrt{\Delta h}$$

式中

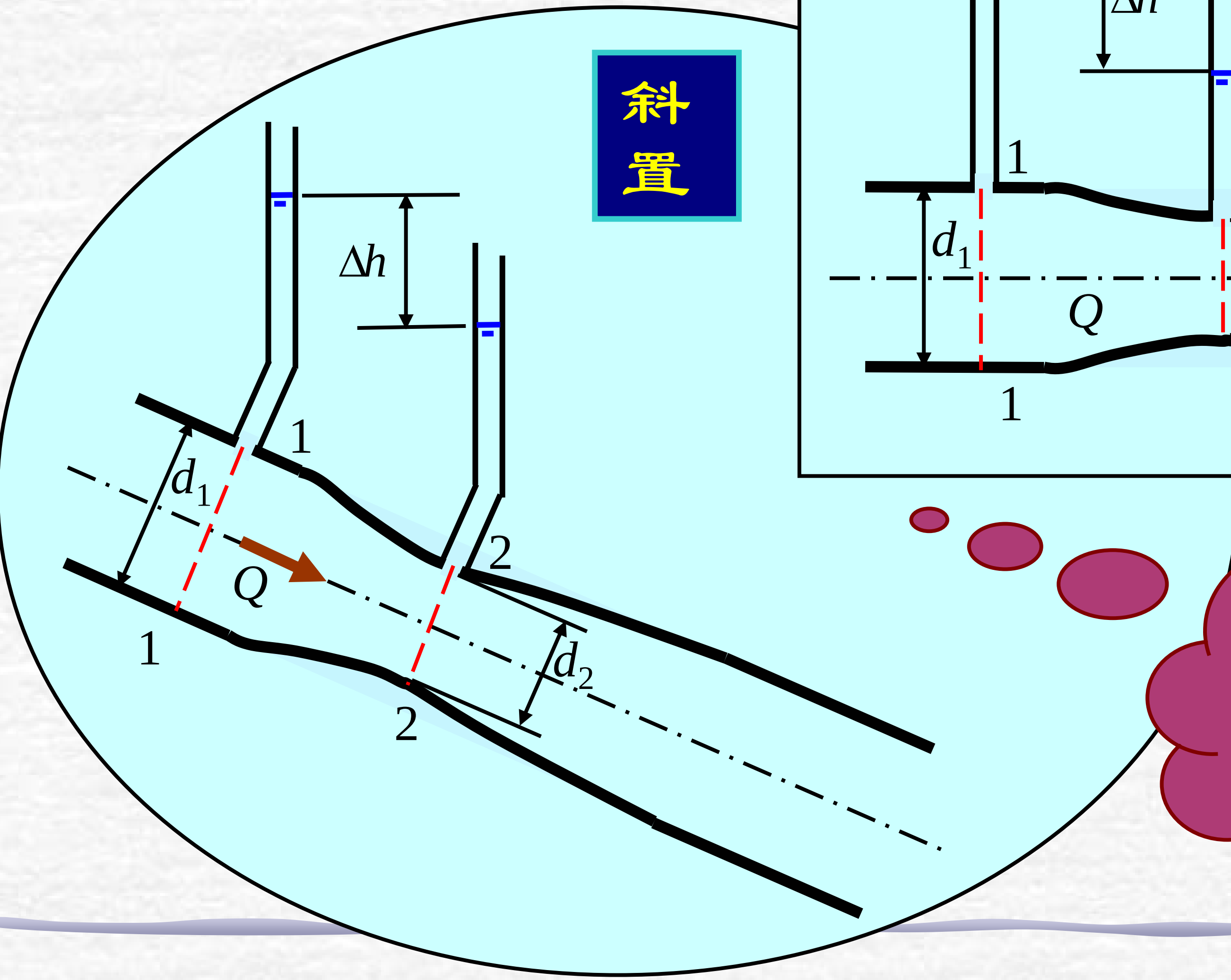
$$K = \frac{\pi}{4}\frac{d_1^2 d_2^2}{\sqrt{d_1^4 - d_2^4}}\sqrt{2g}$$

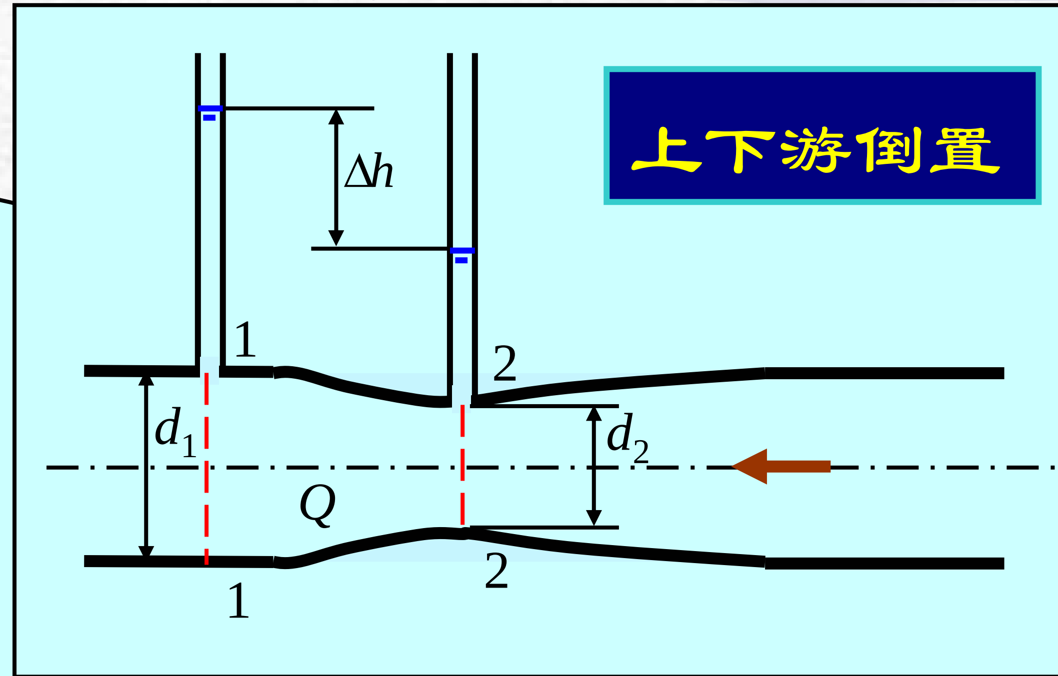
当管中流过实际液体时，由于两断面测管水头差中还包括了因粘性造成的水头损失，流量应修正为：

$$Q_{实} = \mu K\sqrt{\Delta h}$$

其中，$\mu < 1.0$ 称为文透里管的流量系数。

思考





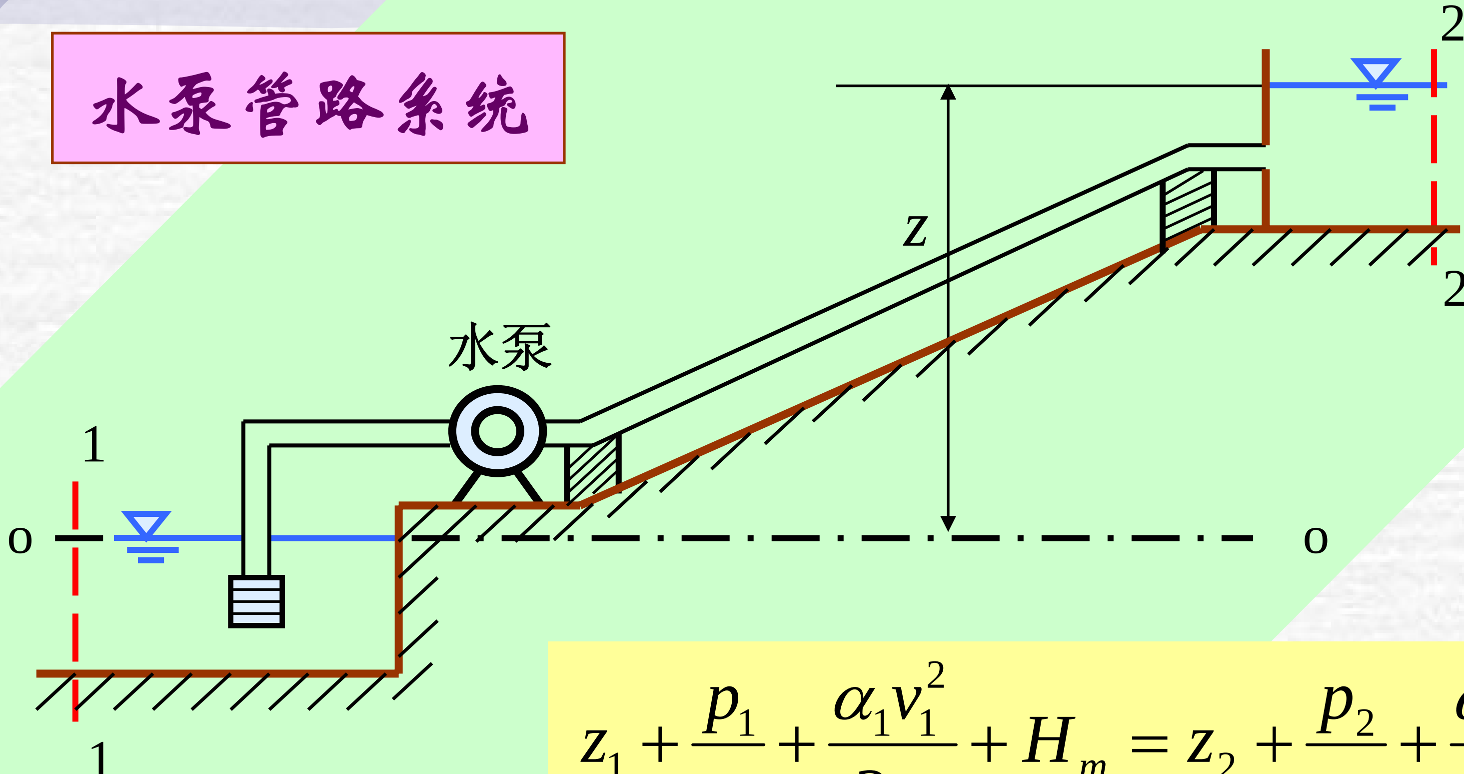
文透里管可否斜置?可否上下游倒置?

四. 有能量输入或输出的能量方程

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\pm H_m=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}$$

1、2 断面之间单位重量流体从水力机械获得（取+号，如水泵）或给出（取-号，如水轮机）的能量

水泵管路系统



$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+H_m=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}$$

= ≈ =

0 **0** z **0**

$$H_m=z+h_{w1-2}$$

$$H_m = z + h_{w1-2}$$

扬程

提水高度

水泵轴功率

$$N_p = \frac{\gamma Q H_m}{\eta_p}$$

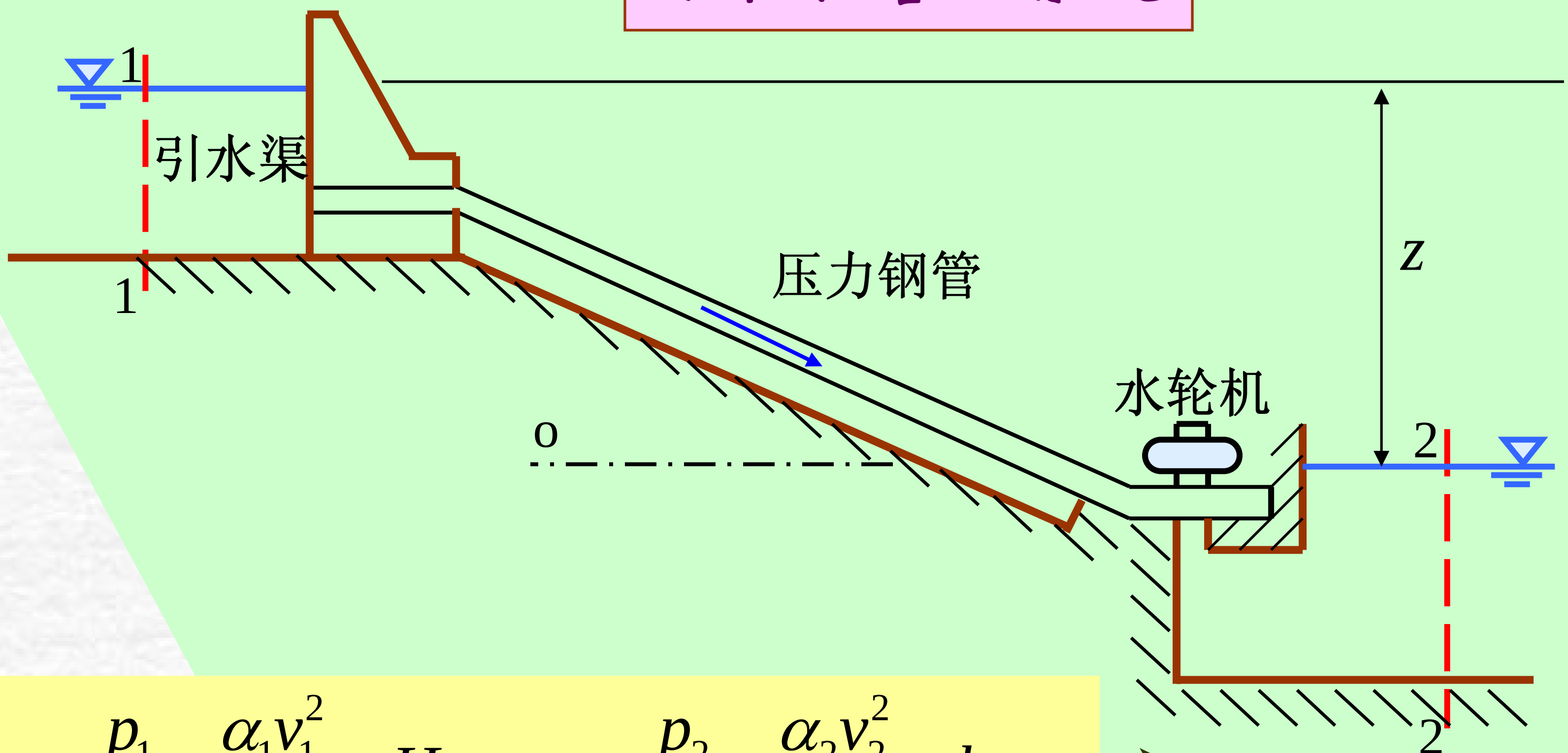
分子

单位时间水流获得总能量

分母

水泵效率

水轮机管路系统



$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}-H_m=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}$$

$z_1 = z$, $\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \approx 0$, $\frac{p_2}{\gamma} = 0$, $\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \approx 0$

$$H_m = z - h_{w1-2}$$

$$H_m = z - h_{w1-2}$$

水轮机作用水头

不包括水轮机系统内的损失

$\gamma Q H_m$

单位时间水流输出总能量

$$N_t = \eta_t \gamma Q H_m$$

水轮机功率

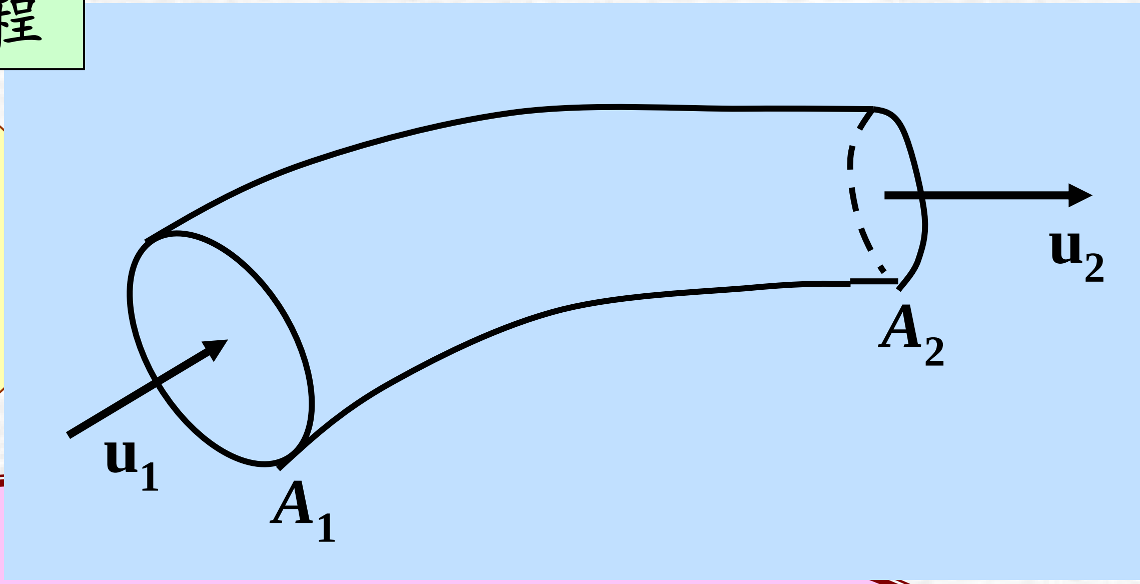
η_t

水轮机效率

§ 4—4 恒定总流的动量方程

一. 恒定总流的动量方程

控制体：上游过水断面 A_1 和下游过水断面 A_2 之间的总流管



单位时间里通过总流过水断面的动量——动量通量

$$\iint_A \rho u \mathbf{u}\, \mathrm{d}A$$

按照欧拉观点表述动量守恒定律

单位时间一段总流管内流体动量的增加	=	单位时间净流入这段总流管的动量	+	这段总流管内流体所受合力
‖		‖		‖
$\mathbf{0}$		$-\iint_{A_2} \rho u \mathbf{u}\, \mathrm{d}A + \iint_{A_1} \rho u \mathbf{u}\, \mathrm{d}A$		$\sum \mathbf{F}$

$$\boxed{\iint_{A_2} \rho u \mathbf{u}\, \mathrm{d}A - \iint_{A_1} \rho u \mathbf{u}\, \mathrm{d}A = \sum \mathbf{F}}$$

把渐变流过水断面上动量通量的表达**一维化**。断面上各点 **u** 的方向一致。

用断面平均流速 v 代替 u，定义 **v** 的大小为 v，方向为 **u** 的方向，用 **v** 代替 **u**，设

$$\iint_A \rho u \mathbf{u} \, \mathrm{d}A = \alpha_0 \iint_A \rho v \mathbf{v} \, \mathrm{d}A$$

$$\iint_A \rho u^2 \, \mathrm{d}A = \rho \alpha_0 v^2 A$$

$$\alpha_0 = \frac{\iint_A u^2 \, \mathrm{d}A}{v^2 A}$$

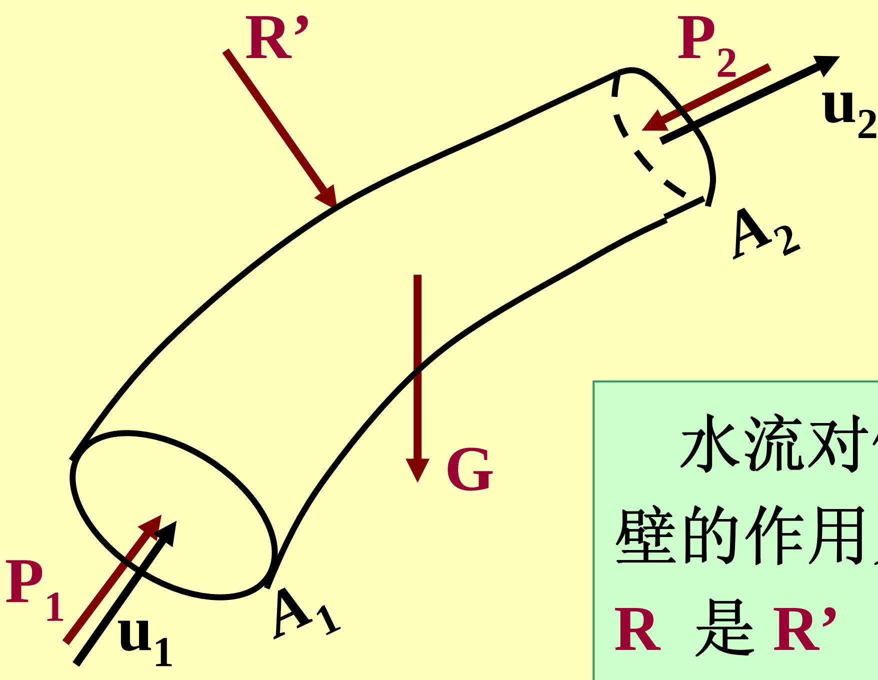
**** α_0 **动量修正系数** *****

大于 **1.0** 的数，其大小取决于断面上的流速分布。在一般的渐变流中的值为 **1.02-1.05** . 为简单起见，也常采用 = **1.0**

一维化的恒定总流动量方程

$$\rho(\alpha_{02}v_2\mathbf{v}_2A_2-\alpha_{01}v_1\mathbf{v}_1A_1)=\sum\mathbf{F} \quad 或 \quad \rho Q(\alpha_{02}\mathbf{v}_2-\alpha_{01}\mathbf{v}_1)=\sum\mathbf{F}$$

$\sum\mathbf{F}$ 上游水流作用于断面A_1上的动水压力P_1，下游水流作用于断面A_2上的动水压力P_2，重力G和总流侧壁边界对这段水流的总作用力R’。其中只有重力是质量力，其它都是表面力。



水流对侧壁的作用力R 是 R’ 的反作用力

恒定总流动量方程是矢量方程，实际使用时一般都要写成分量形式

$$\rho Q(\alpha_{02}v_{2x}-\alpha_{01}v_{1x})=\sum F_x$$

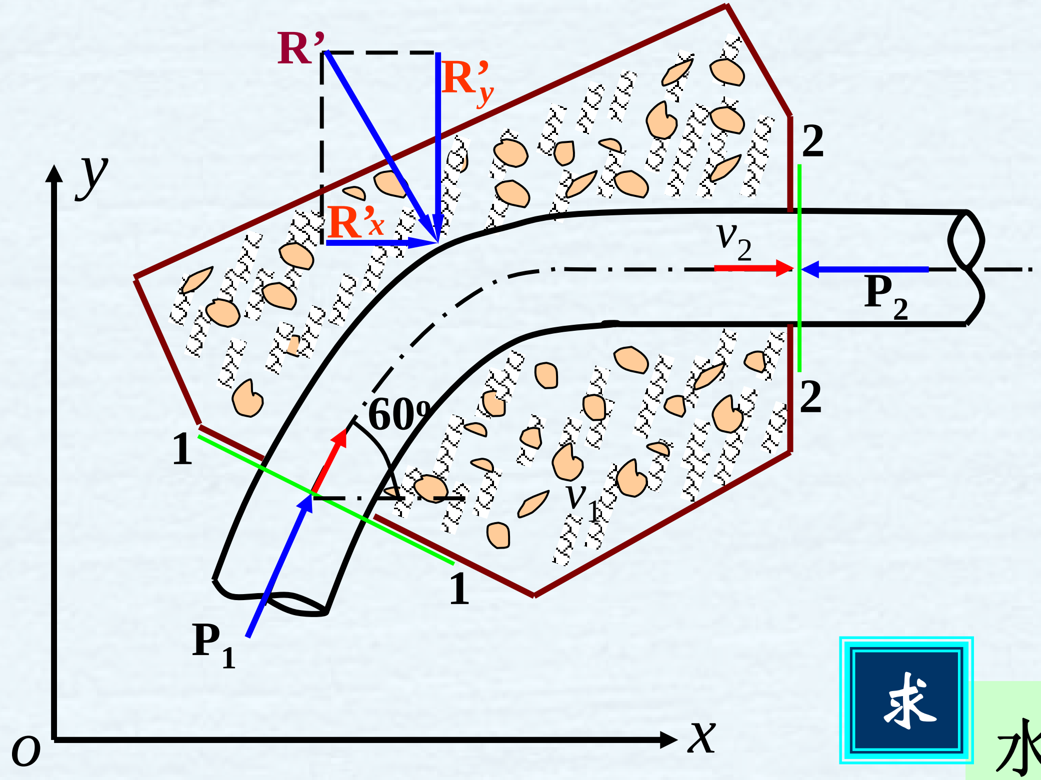
$$\rho Q(\alpha_{02}v_{2y}-\alpha_{01}v_{1y})=\sum F_y$$

$$\rho Q(\alpha_{02}v_{2z}-\alpha_{01}v_{1z})=\sum F_z$$

恒定总流动量方程建立了流出与流进控制体的动量流量之差与控制体内流体所受外力之间的关系，避开了这段流动内部的细节。对于有些水力学问题，能量损失事先难以确定，用动量方程来进行分析常常是方便的。

二. 恒定总流动量方程应用举例

例 水流对弯管的作用力



已知

弯管水平转过60度

$d = 500\text{mm}$

$Q = 1\text{m}^3/\text{s}$

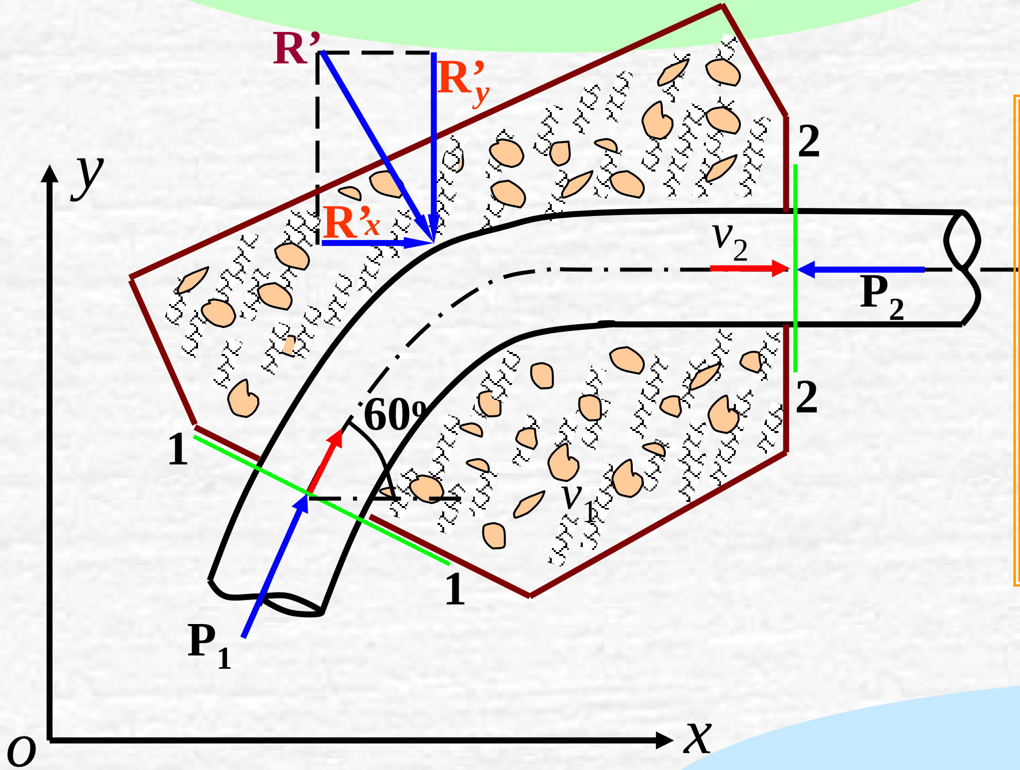
$$\frac{p_1}{\gamma} = 18\,\text{m}(H_2O)$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 17.7\,\text{m}(H_2O)$$

求 水流对弯管的作用力**R**

$$\rho Q(\alpha_{02}v_{2x}-\alpha_{01}v_{1x})=P_1\cos 60^0-P_2+R'_x$$

$$\rho Q(\alpha_{02}v_{2y}-\alpha_{01}v_{1y})=P_1\sin 60^0-R'_y$$



$$\left\{\begin{aligned}
A&=\frac{1}{4}\pi d^2\\
v_1&=v_2=\frac{Q}{A}\\
v_{1x}&=v_1\cos 60^0\\
v_{1y}&=v_1\sin 60^0\\
v_{2x}&=v_2\\
v_{2y}&=0\\
P_1&=p_1A\\
P_2&=p_2A\\
\alpha_{01}&=\alpha_{02}\approx 1.0
\end{aligned}\right.$$

代入解得 R'_x R'_y

$$R'=\sqrt{R_x'^2+R_y'^2} \qquad \tan(\mathbf{R}',\mathbf{x})=\frac{R'_y}{R'_x}$$

R为R'的反作用力

本例要点

❖上下游断面取在渐变流段上。

❖动量方程是矢量式，式中作用力、流速都是矢量。动量方程式中流出的动量为正，流入为负。

❖分析问题时，首先要标清流速和作用力的具体方向，然后选取合适的坐标轴，将各矢量向坐标轴投影，把动量方程写成分量形式求解。在这个过程中，要注意各投影分量的正负号。

❖方程中应包括作用于控制体内流体的一切外力：两断面上的压力、重力、四周边界对水流的作用力。不能将任何一个外力遗漏。

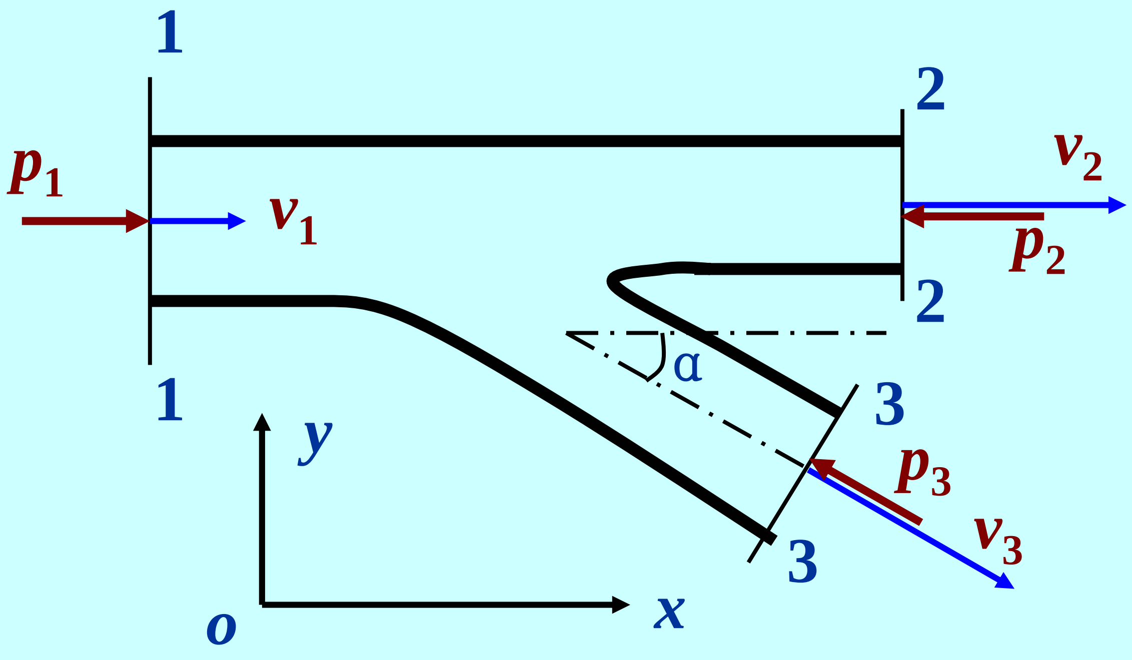
❖本例中流体水平转弯，铅垂方向无动量变化，重力不出现。

❖对于未知的边界作用力可先假定一个方向，如解出结果为正值，说明原假设方向正确；如解出结果为负值，则作用力方向与原假设方向相反。

❖动量方程中出现的是弯管对水流的作用力，水流对弯管的作用力是其反作用力。

§4—5 求解恒定总流问题的几点说明

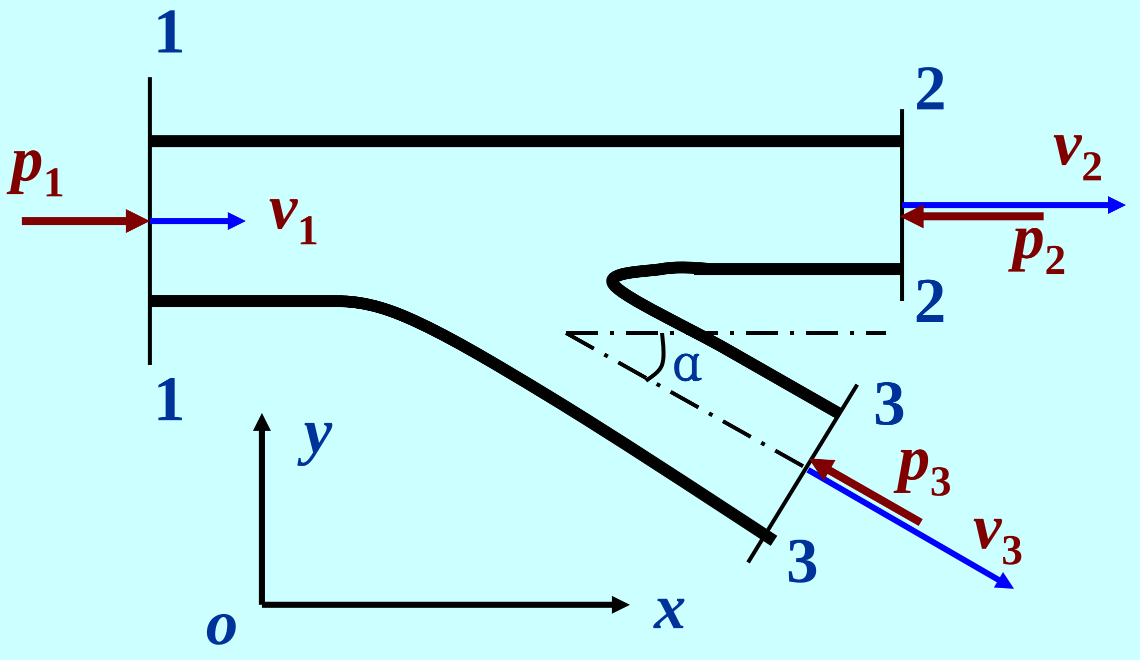
- 恒定总流的三大方程，在实际计算时，有一个联用的问题，应根据情况灵活运用。



- 在有流量汇入或分出的情况下，要按照三大方程的物理意义正确写出它们的具体形式。

- 动量方程（以 x 方向为例）：

$$\rho v_2 A_2(\alpha_{02} v_{2x}) + \rho v_3 A_3(\alpha_{03} v_{3x}) - \rho v_1 A_1(\alpha_{01} v_{1x}) = G_x + P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + R'_x$$

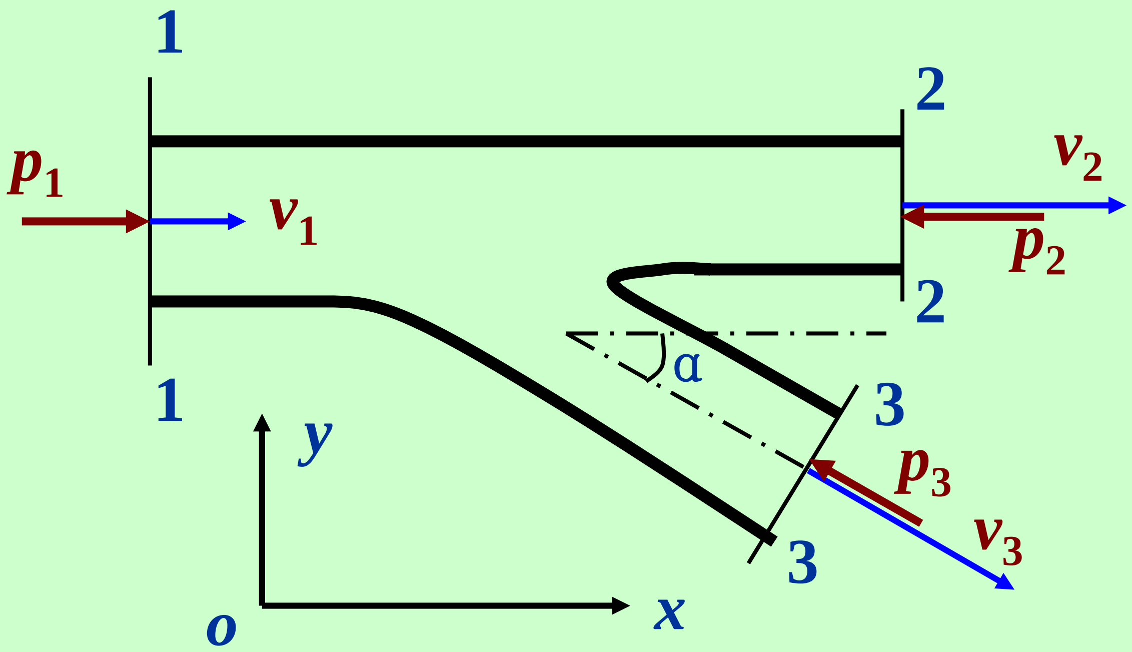


- 连续方程：

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 + v_3 A_3$$

- 能量方程：

$$\begin{cases} z_1+\dfrac{p_1}{\gamma}+\dfrac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\dfrac{p_2}{\gamma}+\dfrac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2} \\ z_1+\dfrac{p_1}{\gamma}+\dfrac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_3+\dfrac{p_3}{\gamma}+\dfrac{\alpha_3 v_3^2}{2g}+h_{w1-3} \end{cases}$$



表达能量方程时要注意，不要将单位重量流体能量（水头）误认为能量流量。

总能量平衡

$$\gamma Q_1\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right)=\gamma Q_2\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}\right)+\gamma Q_3\left(z_3+\frac{p_3}{\gamma}+\frac{\alpha_3 v_3^2}{2g}+h_{w1-3}\right)$$

问题的实质和关键

流量、动量和能量分配相互耦合。关键在于确定水头损失。

- 本章对总流所加的定常限定是非常重要的，有了这个限定，系统质量、动量和能量的守恒才与控制体内的流动情况无关，完全可以在边界上表达。否则三大方程不会给我们带来如此大的便利。