第二章 流体静力学

- 流体静力学研究流体的平衡规律，由平衡条件求静压强分布，并求静水总压力。
- 静止是相对于坐标系而言的，不论相对于惯性系或非惯性系静止的情况，流体质点之间肯定没有相对运动，这意味着粘性将不起作用，所以流体静力学的讨论不须区分流体是实际流体或理想流体。

第二章 流体静力学

§2—1 流体静压强及其特性

§2—2 流体的平衡微分方程

§2—3 重力作用下的液体平衡

§2—4 非惯性系中液体的平衡

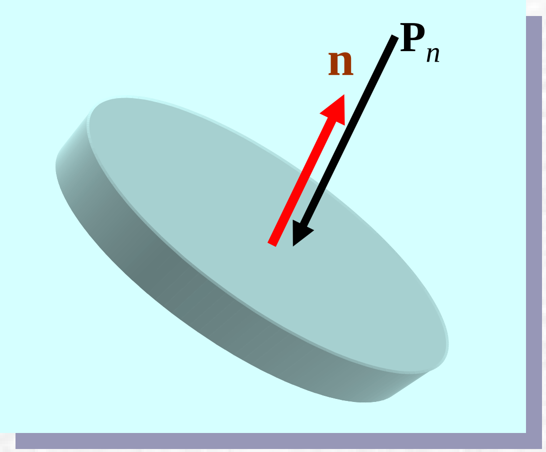
§2—5 静止液体作用在物体表面上的总压力

§2—1 流体静压强及其特性

- 静止流体的应力只有内法向分量 — 静压强

➢静止流体的应力只有法向分量（流体质点之间没有相对运动不存在切应力）。

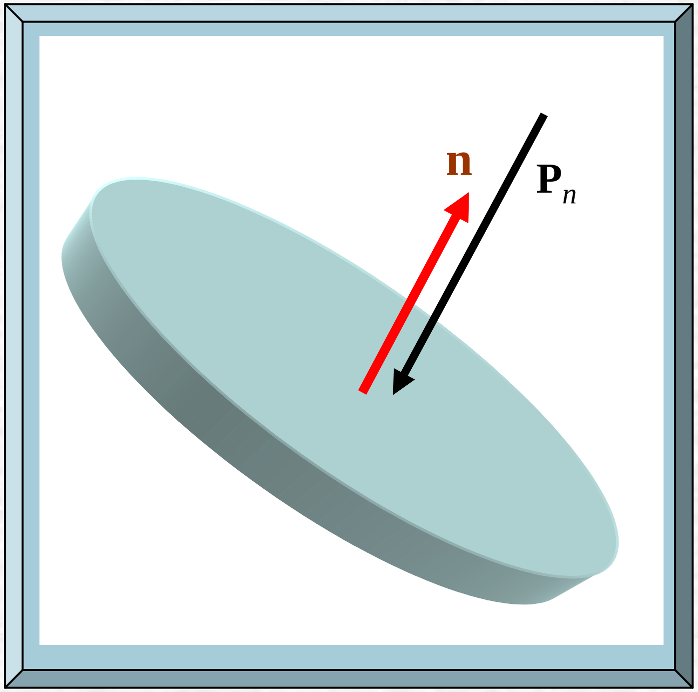
➢法向应力沿内法线方向，即受压的方向（流体不能受拉）。这个法向应力称为静压强，记作 $p_n(x,y,z)$，因目前还不知静压强是否与作用面方位有关，脚标中须标上作用面法线方向。



➢静止流体中一点的应力

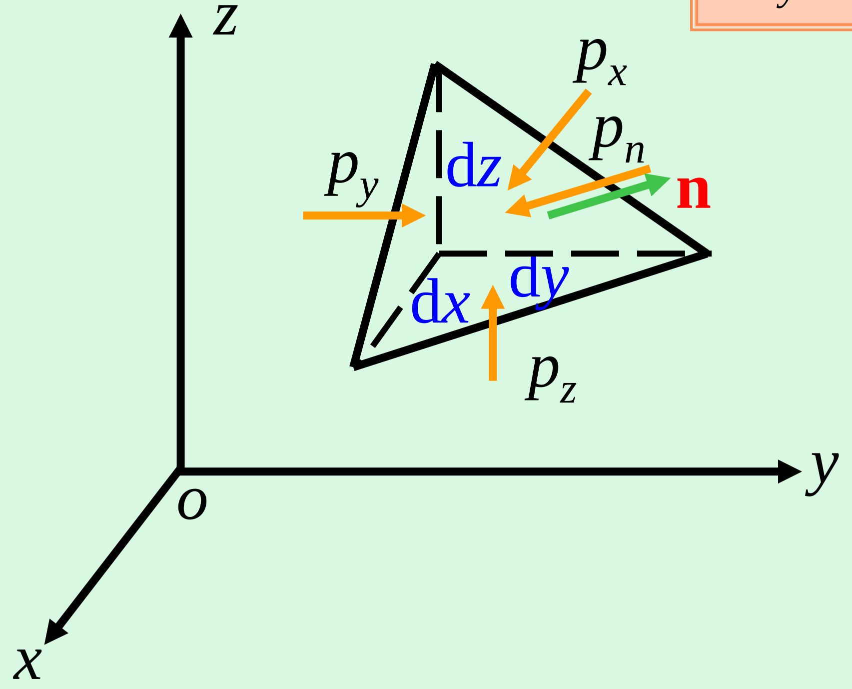
$$\mathbf{p}_n(x,y,z) = -p_n(x,y,z)\,\mathbf{n}$$

在这个表达式中，已包含了应力四要素：作用点、作用面、受力侧和作用方向。



- 静压强的大小与作用面的方位无关

> 在静止流体中取出以 M 为顶点的四面体流体微元，它受到的质量力和表面力必是平衡的，以 y 方向为例，写出平衡方程



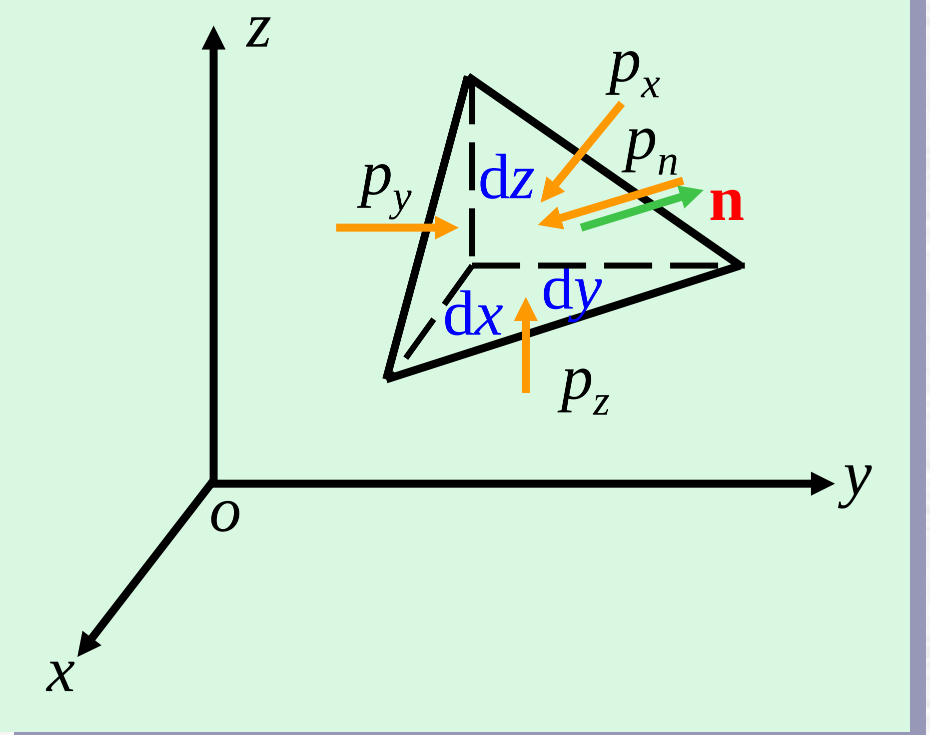
$$p_y \,\mathrm{d}A_y - p_n \,\mathrm{d}A_n \cos(\mathbf{n},\mathbf{y}) + \rho Y \,\mathrm{d}V = 0$$

Y 是质量力在 y 方向的分量

$$\mathrm{d}A_y = \mathrm{d}A_n \cos(\mathbf{n},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{6}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

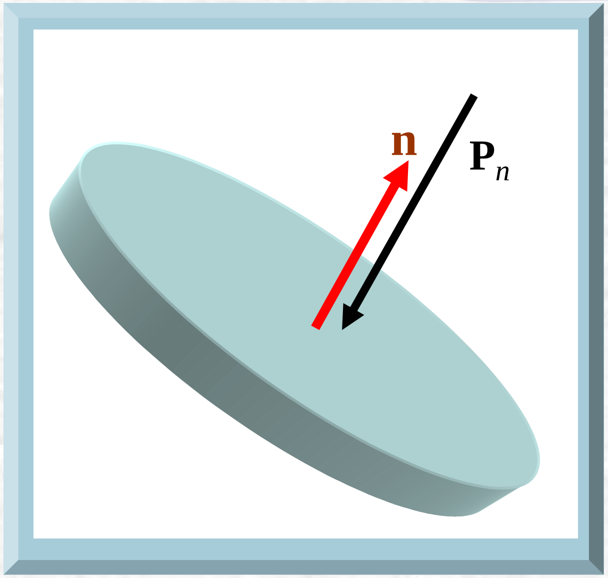
➢ 当四面体微元趋于M点时，注意到质量力比起面力为高阶无穷小，即得$p_n=p_y$，同理有$p_n=p_x$，$p_n=p_z$



$$p_n = p_x = p_y = p_z$$

此时，p_n，p_x，p_y，p_z已是同一点（M点）在不同方位作用面上的静压强，其中斜面的方位 **n** 又是任取的，这就证明了静压强的大小与作用面的方位无关。

- 静压强 $p_n(x,y,z)$ 与作用面的方位无关，仅取决于作用点的空间位置，所以可将脚标去掉写成 $p(x,y,z)$



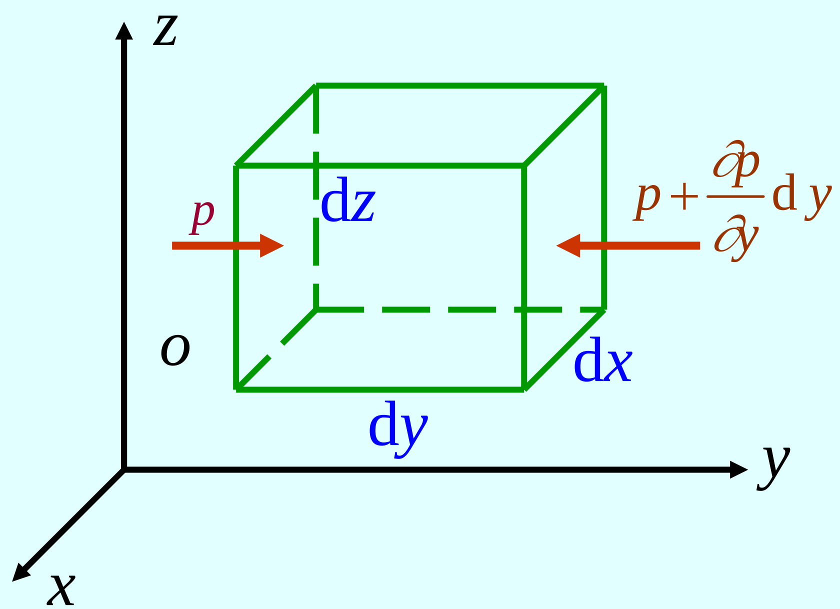
- 静止流体的应力状态只须用一个静压强数量场 $p = p(x, y, z)$ 来描述，有了这个静压强场，即可知道在任意一个作用点、以任意方位 **n** 为法向的面元上的应力为：

$$\boxed{\mathbf{p}_n(x,y,z) = -p(x,y,z)\mathbf{n}}$$

§2—2 流体的平衡微分方程

- 平衡微分方程的推导

在静止流体中取出六面体流体微元，分析其在 y 方向的受力。



微元所受 y 方向上的质量力为 ⇨ $\rho Y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

表面力在 y 方向上的分量只有左右一对面元上的压力，合力为 ⇨

$$p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=-\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

平衡方程为

$$\rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

或

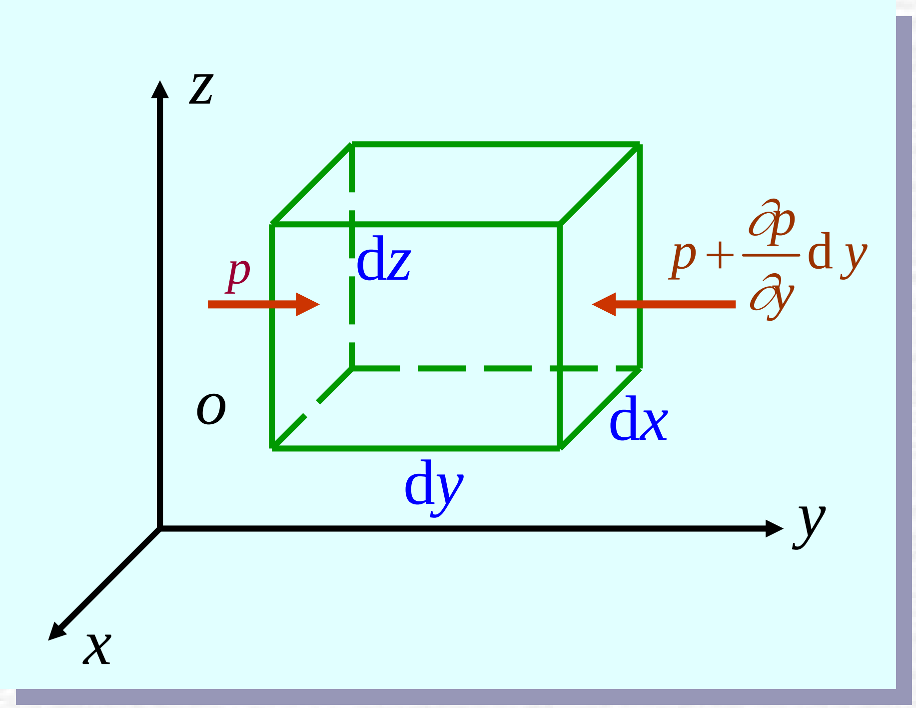
$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

同理有

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

和

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$



其中 **X, Y, Z** 是质量力 **f** 的三个分量。

- 平衡微分方程的矢量形式

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

其中

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k}$$

称为静压强场的梯度。它是数量场 $p(x,y,z)$ 对应的一个矢量场。

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

称为哈米尔顿算子,它同时具有矢量和微分（对跟随其后的变量）运算的功能。用它来表达梯度，非常简洁，并便于记忆。

• 平衡微分方程的物理意义

- ∇p 的三个分量是压强在三个坐标轴方向的方向导数，它反映了数量场在空间上的不均匀性。
- 流体的平衡微分方程实质上表明了质量力和压差力之间的平衡。
- 压强对流体受力的影响是通过压差来体现的。

§ 2—3 重力作用下的液体平衡

一．重力作用下的平衡方程

z 轴垂直向上，流体不可压缩。

$$\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \\ g+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\rho g=-\gamma$$

$$\mathbf{f}=-g\mathbf{k}$$

二. 静压强分布规律

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\rho g=-\gamma$$

积分

$$p=-\gamma z+C$$

或

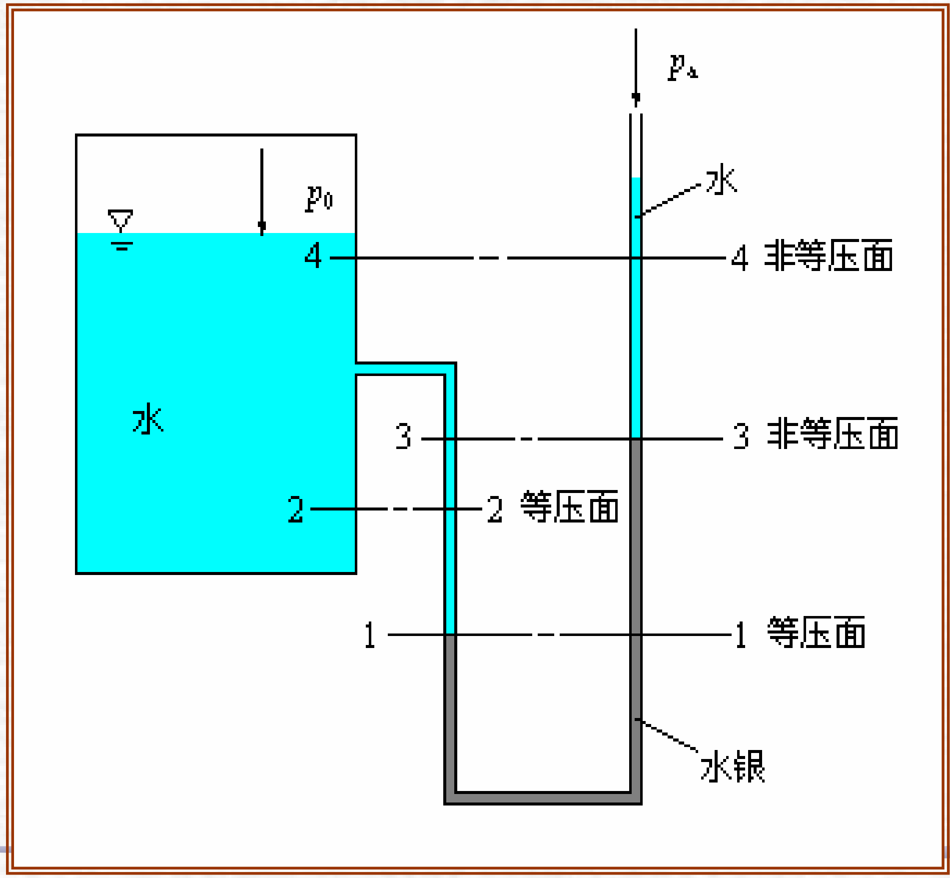
$$\boxed{z+\frac{p}{\gamma}=C}$$

- 重力场中连通的同种静止液体中：

① 压强随位置高程线性变化；

② 等压面是水平面，与质量力垂直；

③ $z+\dfrac{p}{\gamma}$ 是常数。



- 要知道静止流体中具体的压强分布，关键是知道其中某一点的压强，从而确定积分常数 **C**

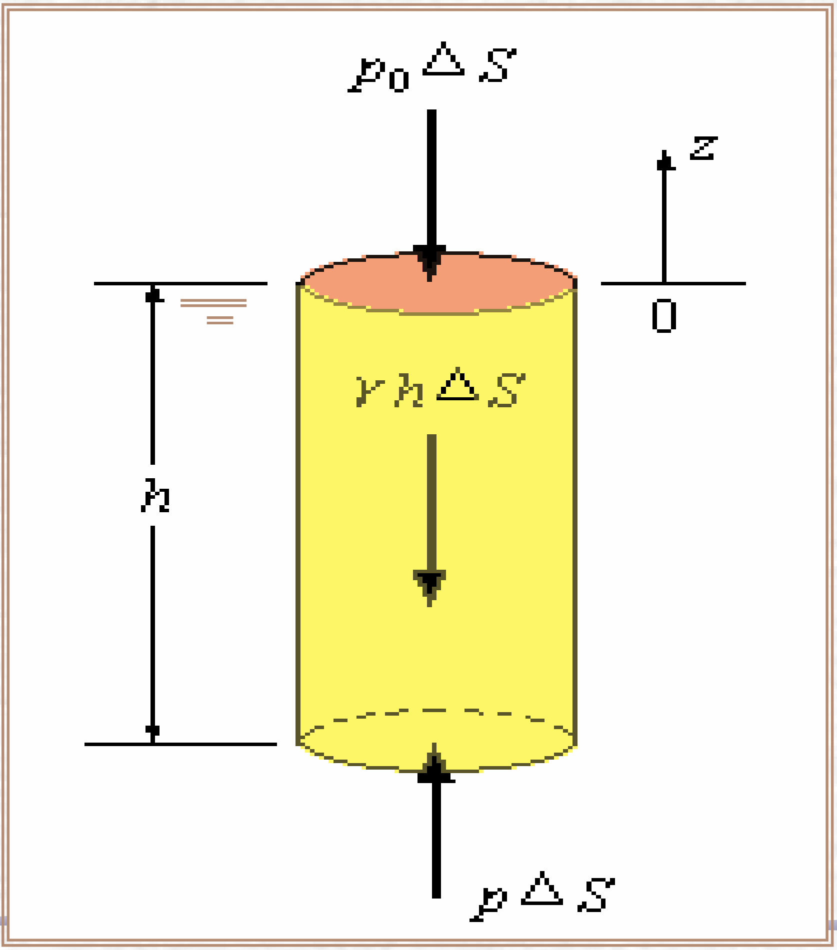
$$z+\frac{p}{\gamma}=C$$

若 $z=z_1$ 时, $p=p_1$, 则

$$z+\frac{p}{\gamma}=z_1+\frac{p_1}{\gamma}$$

或

$$p=p_1-\gamma(z-z_1)$$

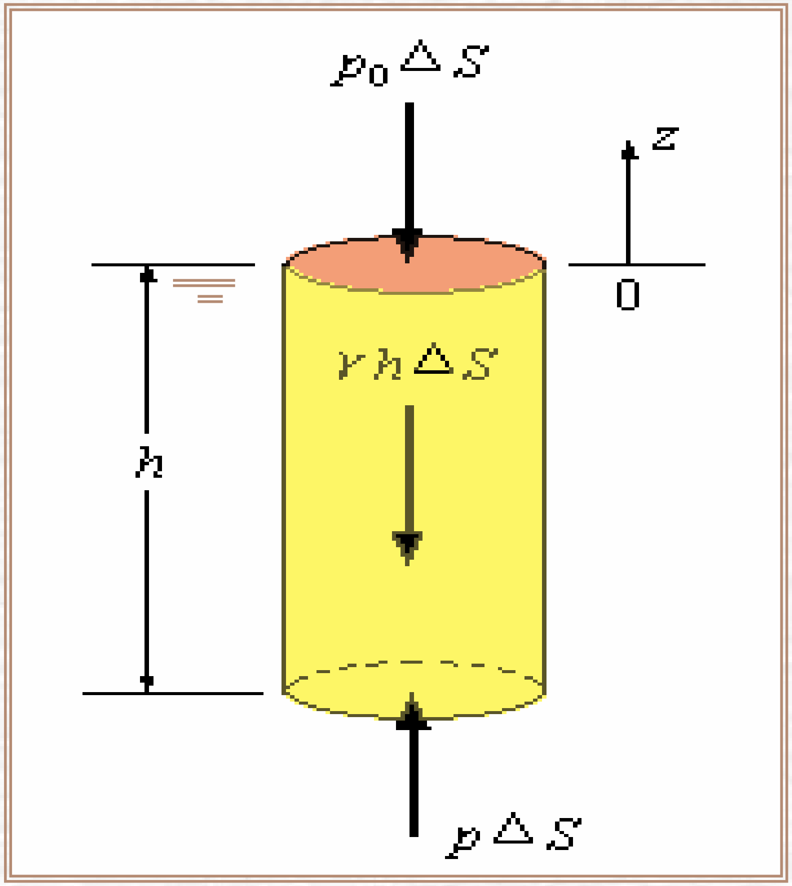


- 如果静止液体有自由面，将自由面作为基准面 $z=0$，自由面上的压强为 p_0，则

$$p = p_0 - \gamma z$$

若令 $h= -z$（向下为正），则

$$p = p_0 + \gamma h$$



三. 绝对压强、相对压强、真空

- 压强 p记值的零点不同，有不同的名称：

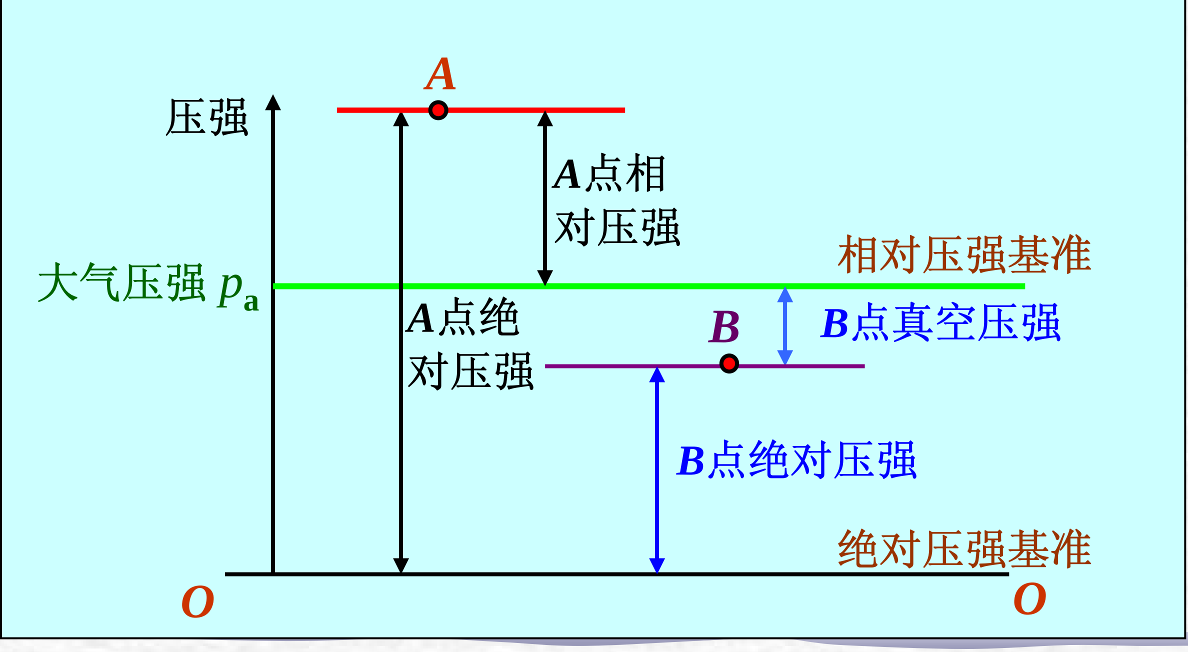
绝对压强 以完全真空为零点，记为 p_{abs}

相对压强 以当地大气压 p_a 为零点，记为 p_r

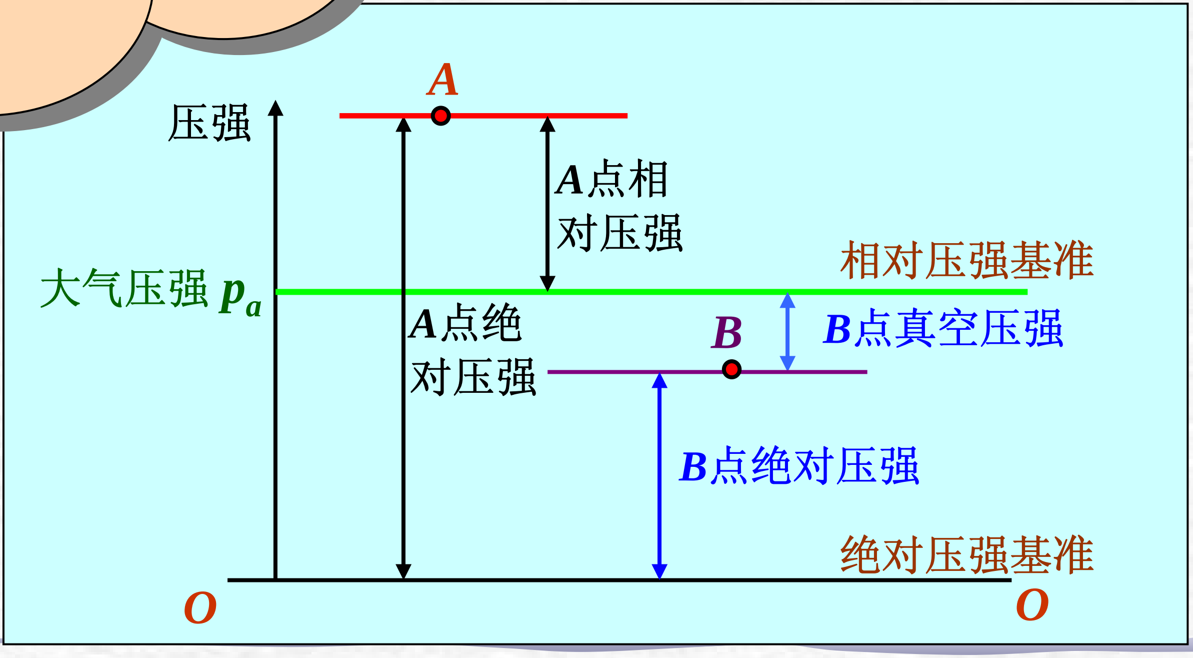
两者的关系为：

$$p_r = p_{abs} - p_a$$

真空压强 相对压强为负值时，其绝对值称为真空压强。

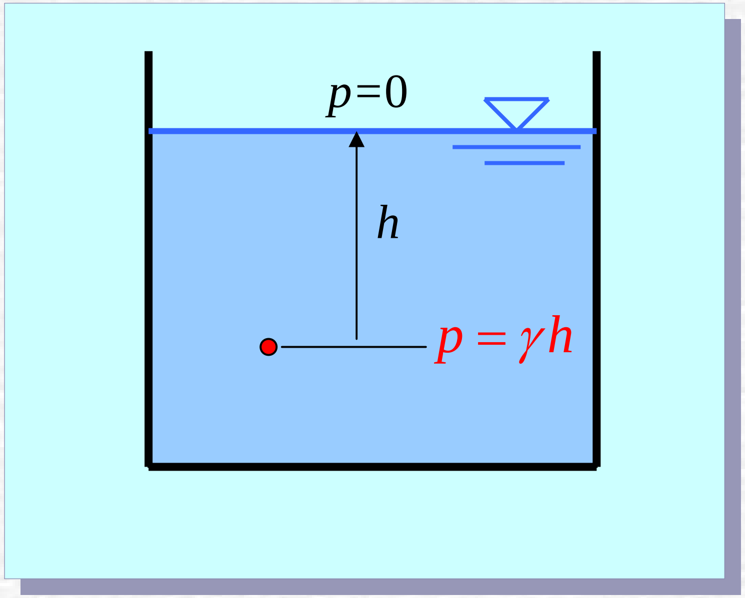


- 今后讨论压强一般指相对压强，省略下标，记为 p，若指绝对压强则特别注明。



- 如果 $z=0$ 为静止液体的自由表面，自由表面上压强为大气压，则液面以下 h 处的相对压强为 γh，所以在液体指定以后高度也可度量压强，称为液柱高，例如：××m(H_2O)，××mm(Hg) 等。特别地，将水柱高称为水头。把真空压强转换成水柱高表示，称为真空度。

- 一个工程大气压为 98.10 kN/m^2，相当于 10 m(H_2O) 或 736 mm(Hg)



四. 位置水头、压强水头、测压管水头

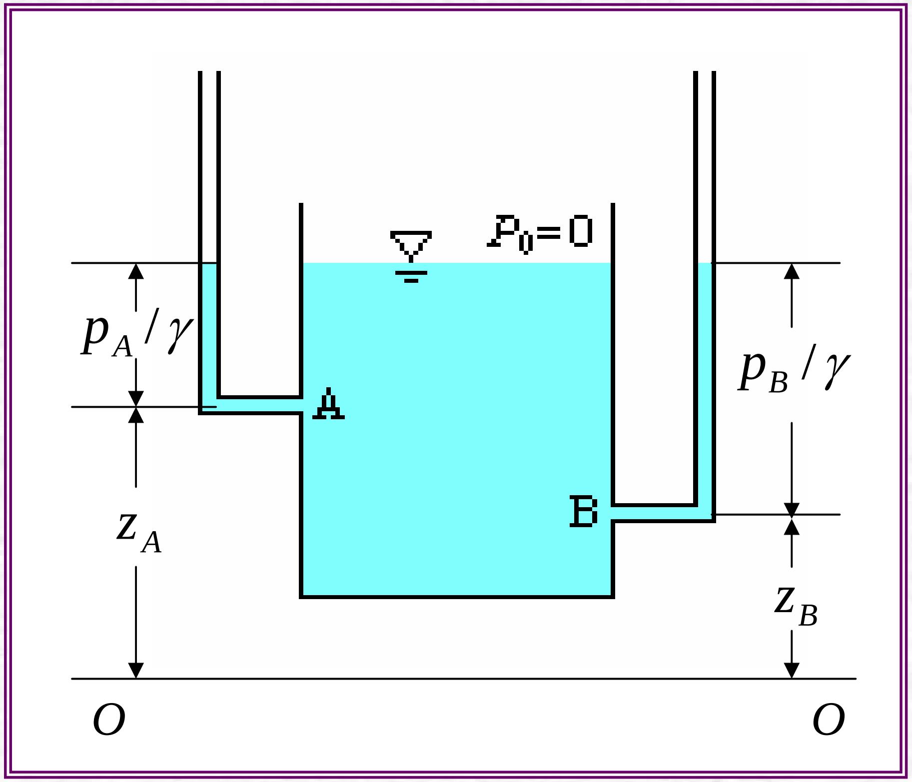
- 在静水压强分布公式 $z+\frac{p}{\gamma}=C$ 中，各项都为长度量纲，称为水头（液柱高）。

- z —— 位置水头，以任取水平面为基准面 $z=0$，铅垂向上为正。
- $\frac{p}{\gamma}$ —— 压强水头，以大气压为基准，用相对压强代入计算。
- $z+\frac{p}{\gamma}$ —— 测压管水头。

• 测压管水头的含义

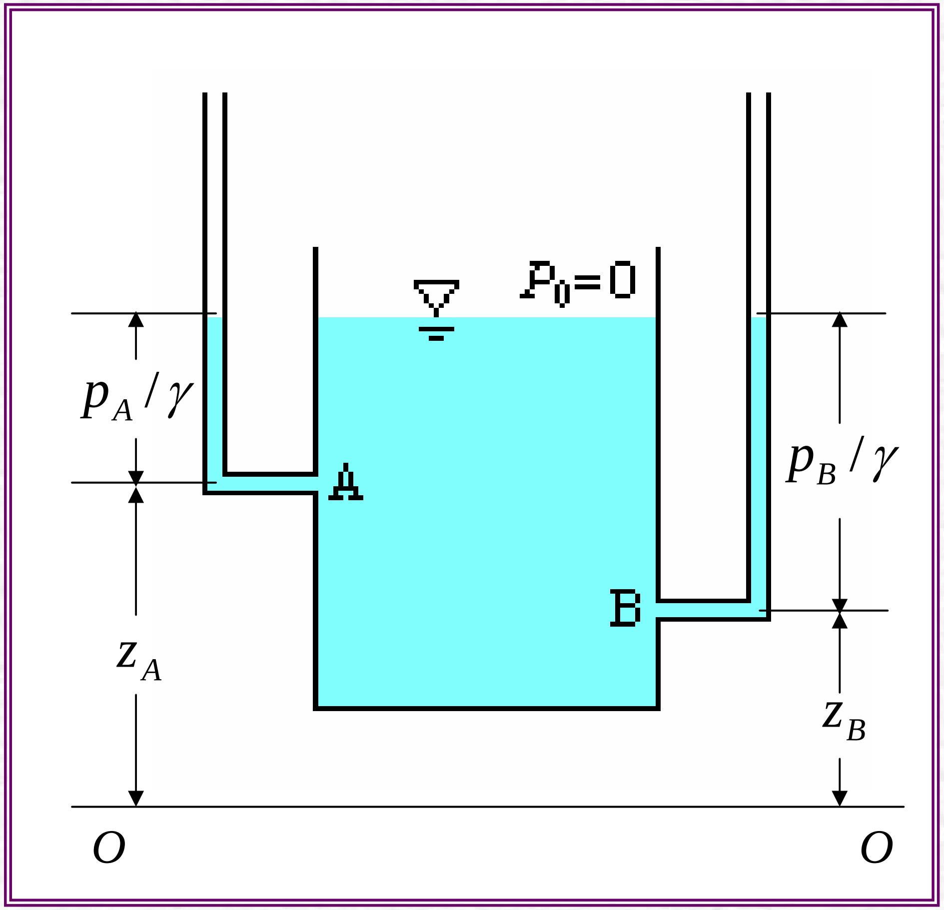
在内有液体的容器壁选定测点，垂直于壁面打孔，接出一端开口与大气相通的玻璃管，即为测压管。

测压管内的静止液面上 $p=0$，其液面高程即为测点处的 $z+\dfrac{p}{\gamma}$，所以叫测压管水头。

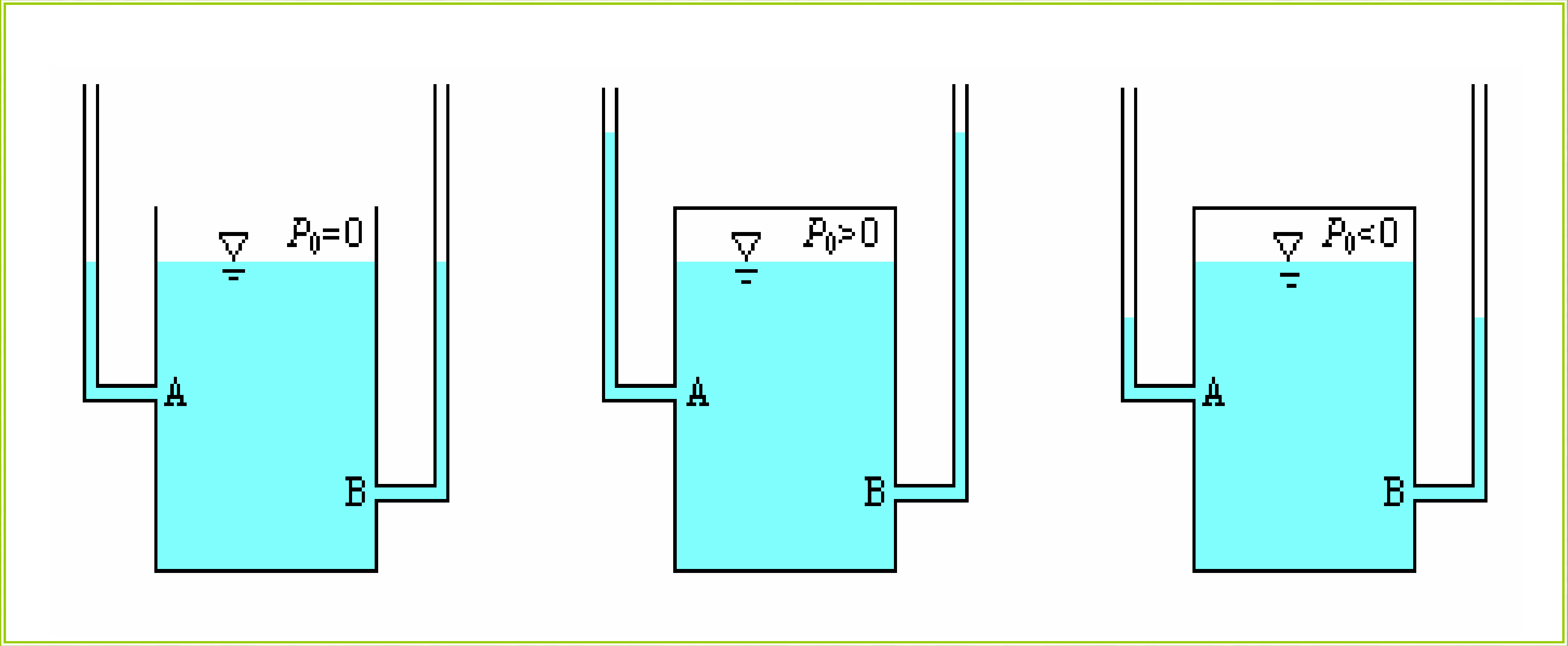


• 测静压只须一根测压管

如果容器内的液体是静止的，一根测压管测得的测压管水头也就是容器内液体中任何一点的测压管水头。如接上多根测压管，则各测压管中的液面都将位于同一水平面上。



- 敞口容器和封口容器接上测压管后的情况如图



- 各项水头也可理解成单位重量液体的能量

z 位置势能，（从基准面 $z=0$ 算起铅垂向上为正。）

$\frac{p}{\gamma}$ 压强势能（从大气压强算起）

$z+\frac{p}{\gamma}$ 总势能

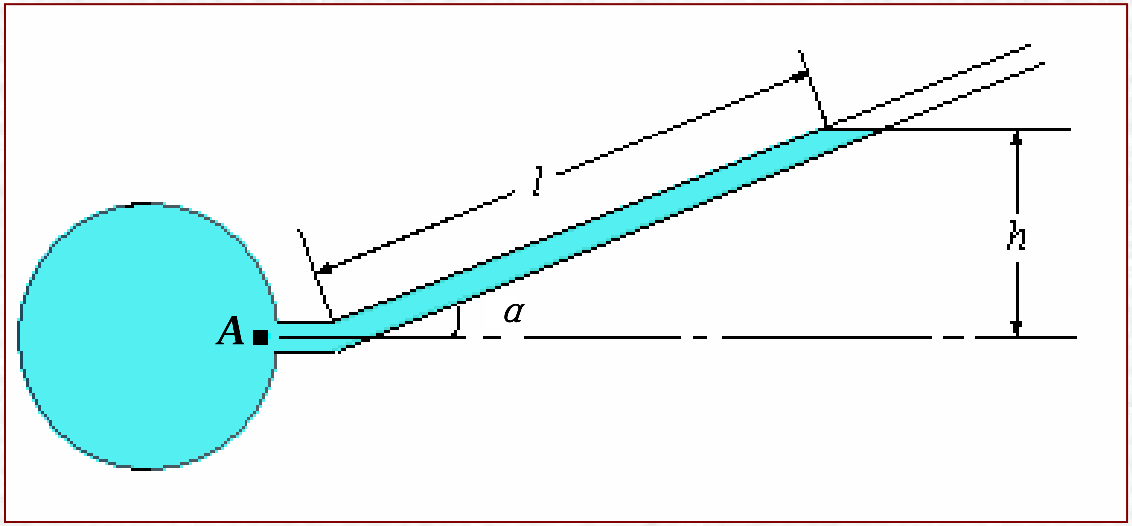
- 液体的平衡规律表明

位置水头（势能）与压强水头（势能）可以互相转换，但它们之和 — 测压管水头（总势能）是保持不变的。

五. 测压原理

- 用测压管测量

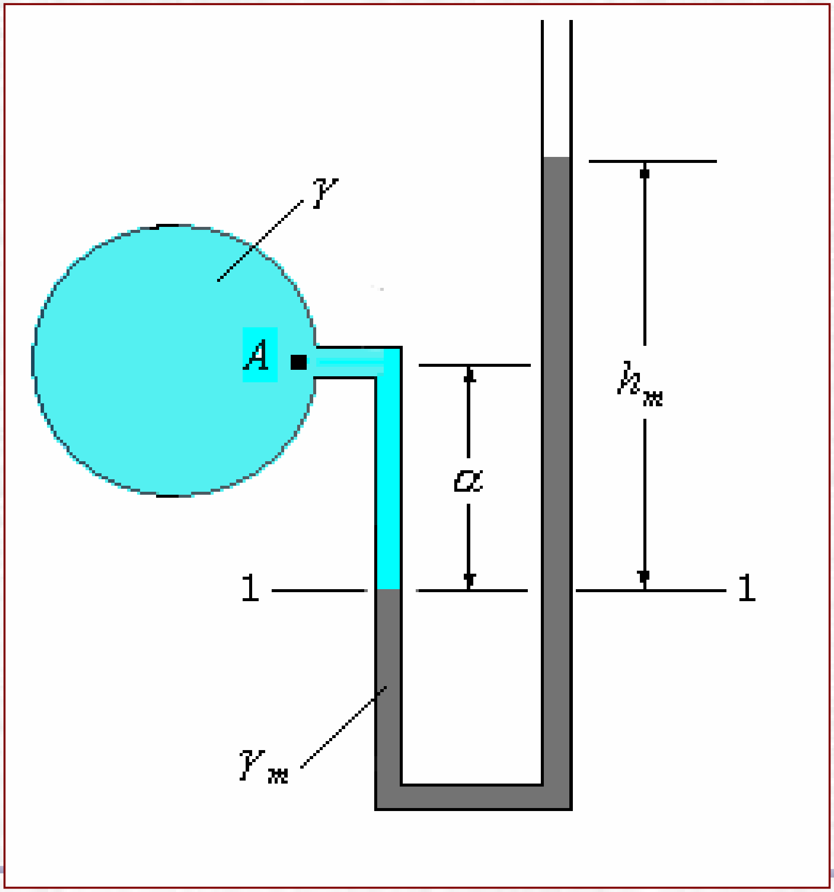
测压管的一端接大气，这样就把测管水头揭示出来了。再利用液体的平衡规律，可知连通的静止液体区域中任何一点的压强，包括测点处的压强。



$$p_A = \gamma h = \gamma l \sin\alpha$$

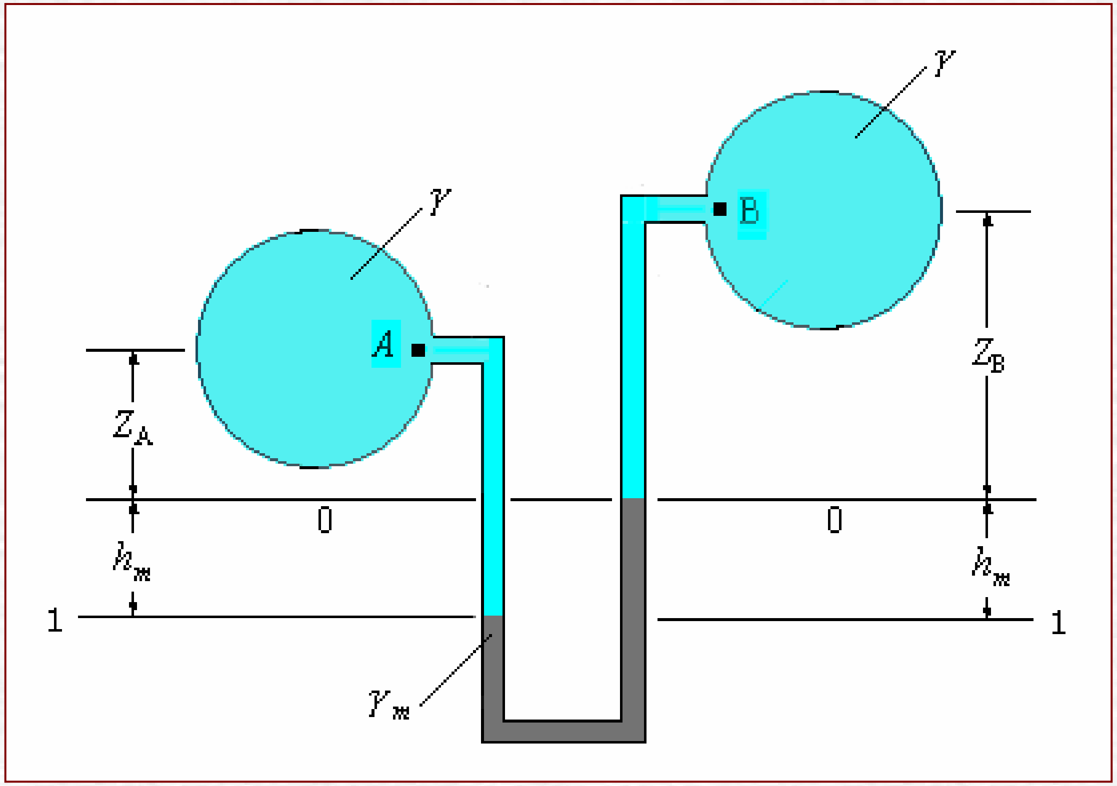
如果连通的静止液体区域包括多种液体，则须在它们的分界面处作过渡。

$$p_A = \gamma_m h_m - \gamma a$$



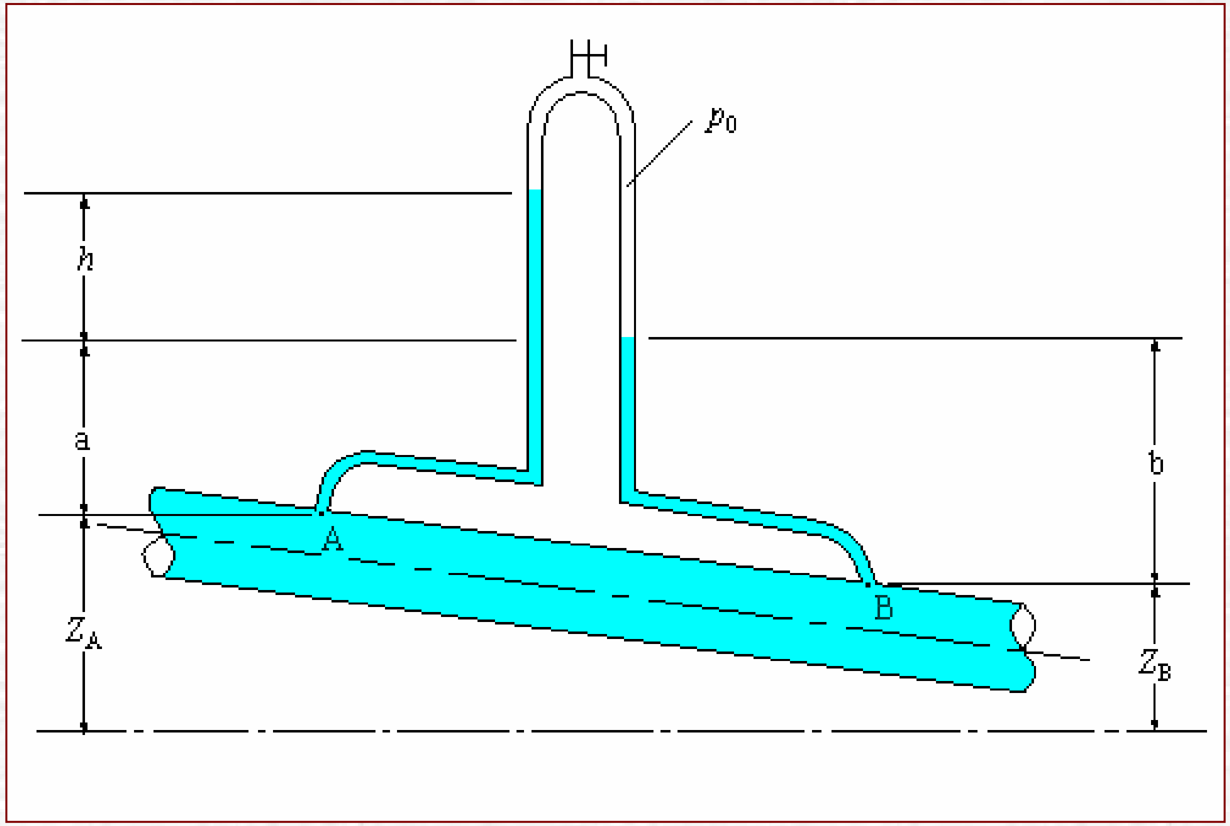
- 用比压计测量

即使在连通的静止流体区域中任何一点的压强都不知道，也可利用流体的平衡规律，知道其中任何二点的压差，这就是比压计的测量原理



$$p_A = p_B + \gamma z_B + \gamma_m h_m - \gamma(z_A + h_m)$$

流体的平衡规律必须在连通的静止流体区域（如测压管中）应用，不能用到管道中去，因为管道中的流体可能是在流动的，测压管不只是为测量静压用的。



$$\left(z_A+\frac{p_A}{\gamma}\right)-\left(z_B+\frac{p_B}{\gamma}\right)=h$$

§ 2—4 非惯性系中液体的平衡

一. 非惯性系中静止液体的平衡方程

表面力中仍无切应力

$$\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0$$

惯性系中静止液体的平衡方程

$$\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\mathbf{a}$$

非惯性系中静止液体的平衡方程

$$\boxed{\mathbf{f}-\mathbf{a}}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0$$

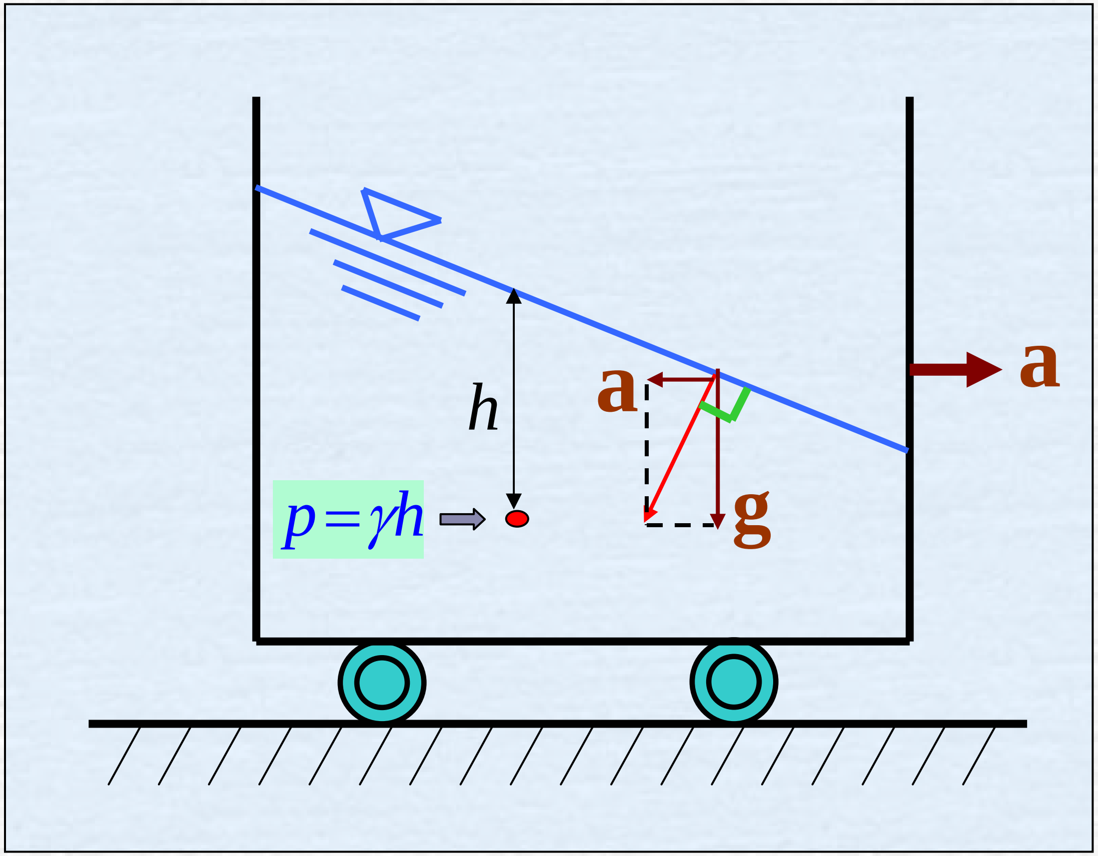
用 $\boxed{\mathbf{f}-\mathbf{a}}$ $\xrightarrow{\text{替代}}$ $\boxed{\mathbf{f}}$

这样非惯性系中平衡方程在处理上就和惯性系没有区别了。

二. 两个例子

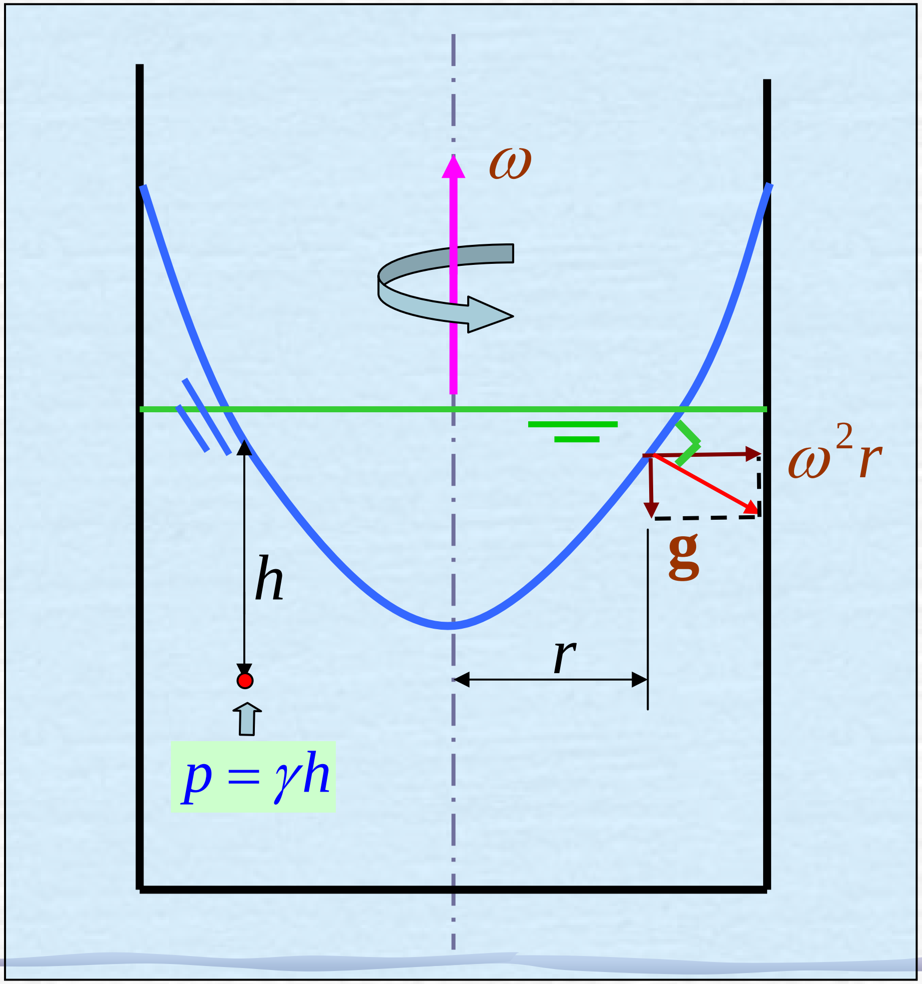
- 相对于匀加速直线运动坐标系静止的液体

所有流体质点加速度大小、方向都相同，重力加上惯性力仍是均匀的，因此等压面还是平面，但不再是水平的，除非加速度在铅垂方向。



• 相对于绕铅垂轴匀速转动的坐标系静止的液体

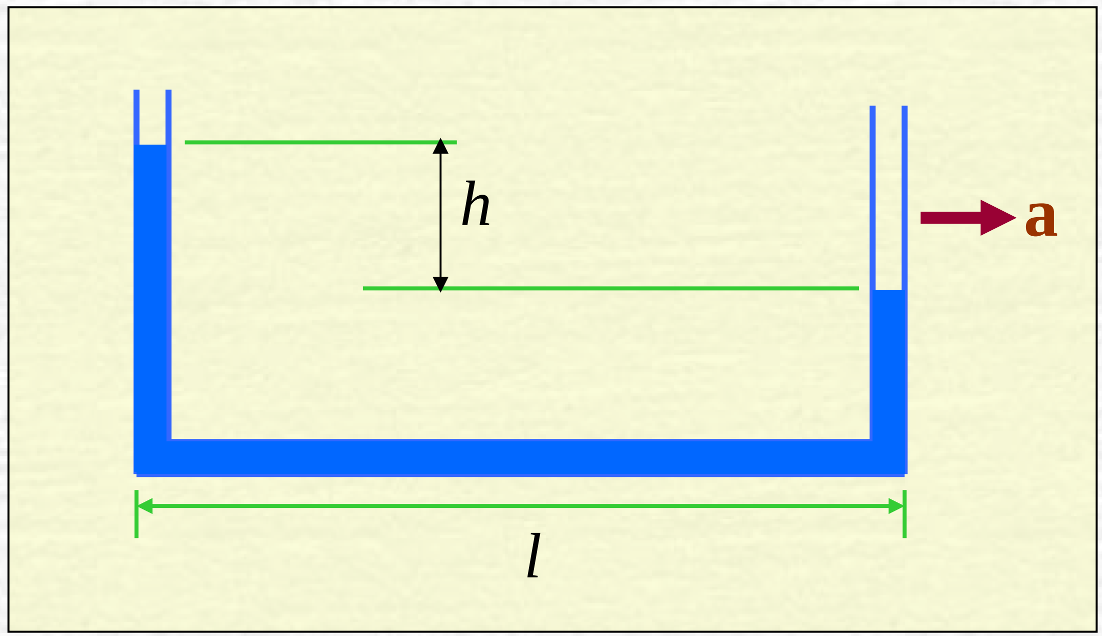
质点加速度为向心加速度，沿水平径向，与质点离开轴的距离成正比，呈轴对称情况。单位质量流体的惯性力为离心加速度，与向心加速度反向，重力加上惯性力不再均匀，等压面成为旋转抛物面，由于离轴越远，离心力越大，所以等压面坡度越陡。



- 如果铅垂方向只有重力作用（惯性力在铅垂方向无分量），那么铅垂方向压强分布仍与自由面下垂直距离 ***h*** 成正比。

- 相对平衡原理可用来测量加速度或转速。

$$a/g=h/l$$

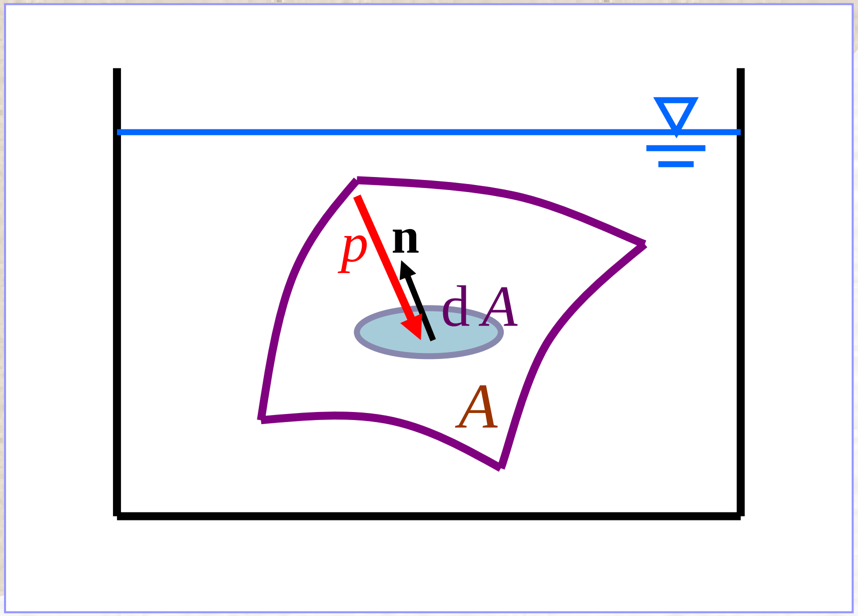


§ 2—5 静止液体作用在物体表面上的总压力

- 在已知静止液体中的压强分布之后，通过求解物体表面 ***A*** 上的矢量积分

$$\mathbf{P} = -\iint_A p\mathbf{n}\,\mathrm{d}A$$

即可得到总压力，实际上这是一个数学问题。



- 完整的总压力求解包括其大小、方向 、作用点。

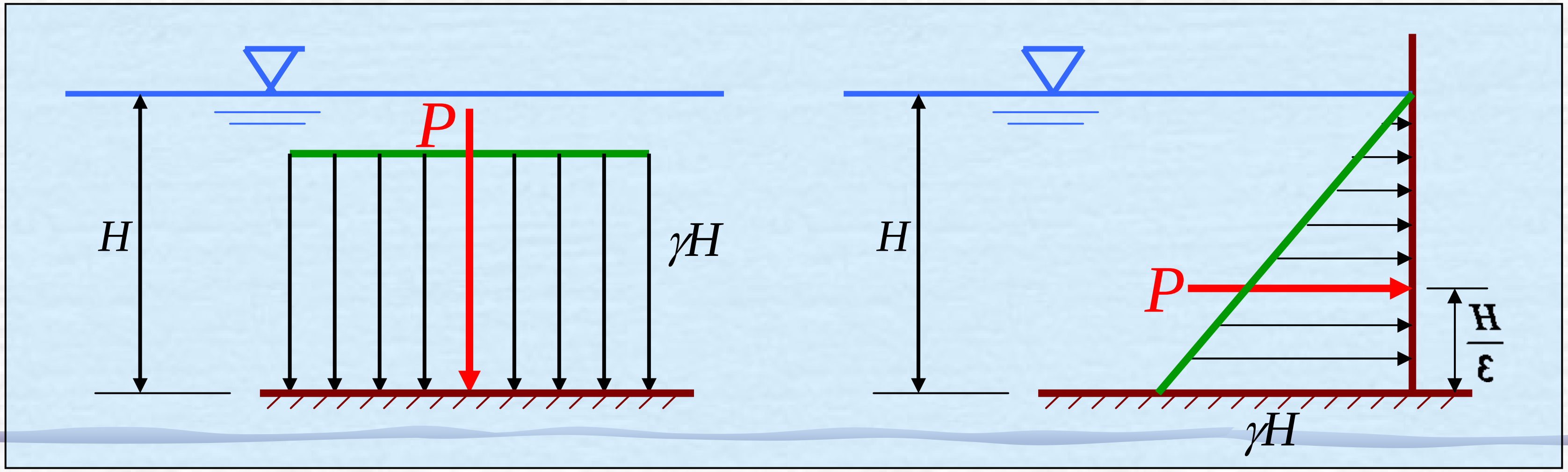
一. 静止液体作用在平面上的总压力

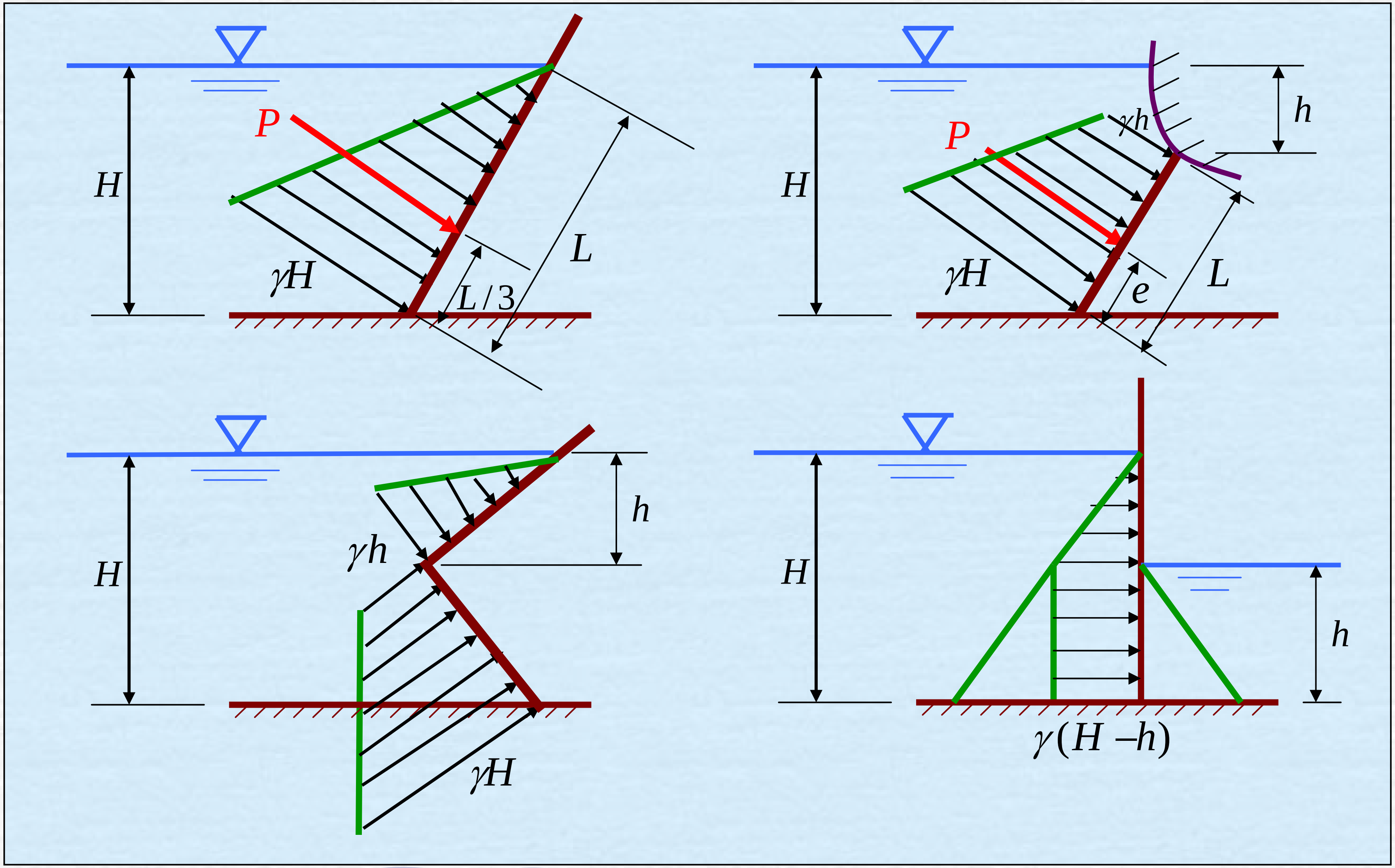
- 这是一种比较简单的情况，是平行力系的合成，即

$$\mathbf{P} = -\iint_A p\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = -\mathbf{n}\iint_A p\,\mathrm{d}A$$

作用力垂直于作用面，指向自己判断。

- 静压强在平面域 ***A*** 上分布不均匀，沿铅垂方向呈线性分布。





P
H
γH
L
L / 3
P
H
γh
h
γH
L
e
H
h
γh
γH
H
h
γ(H –h)

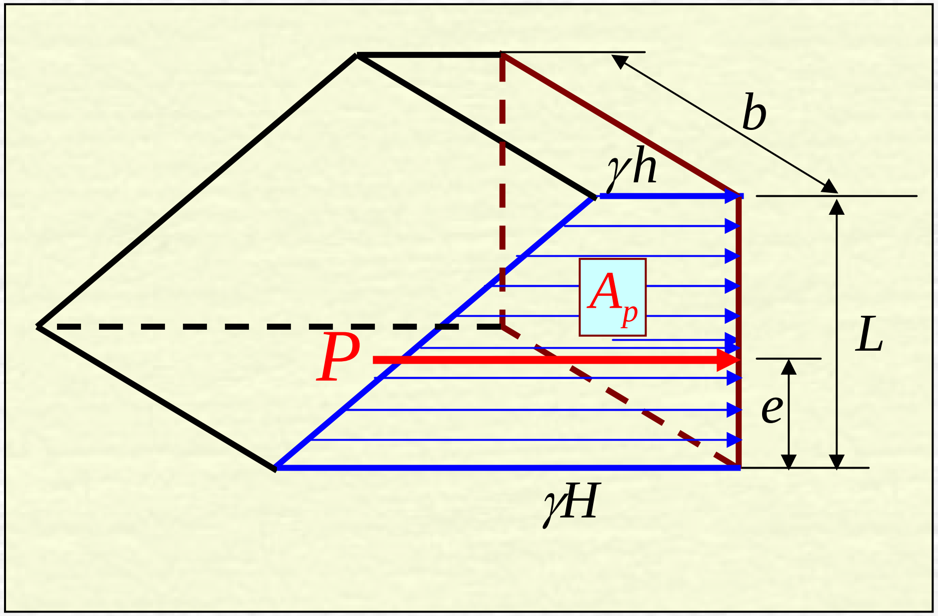
1. 压力图法求矩形平面上的静水总压力

- 矩形平面单位宽度受到的静水总压力是压力分布图 A_P 的面积
- 矩形平面受到的静水总压力通过压力分布图的形心。
- 梯形压力分布图的形心距底

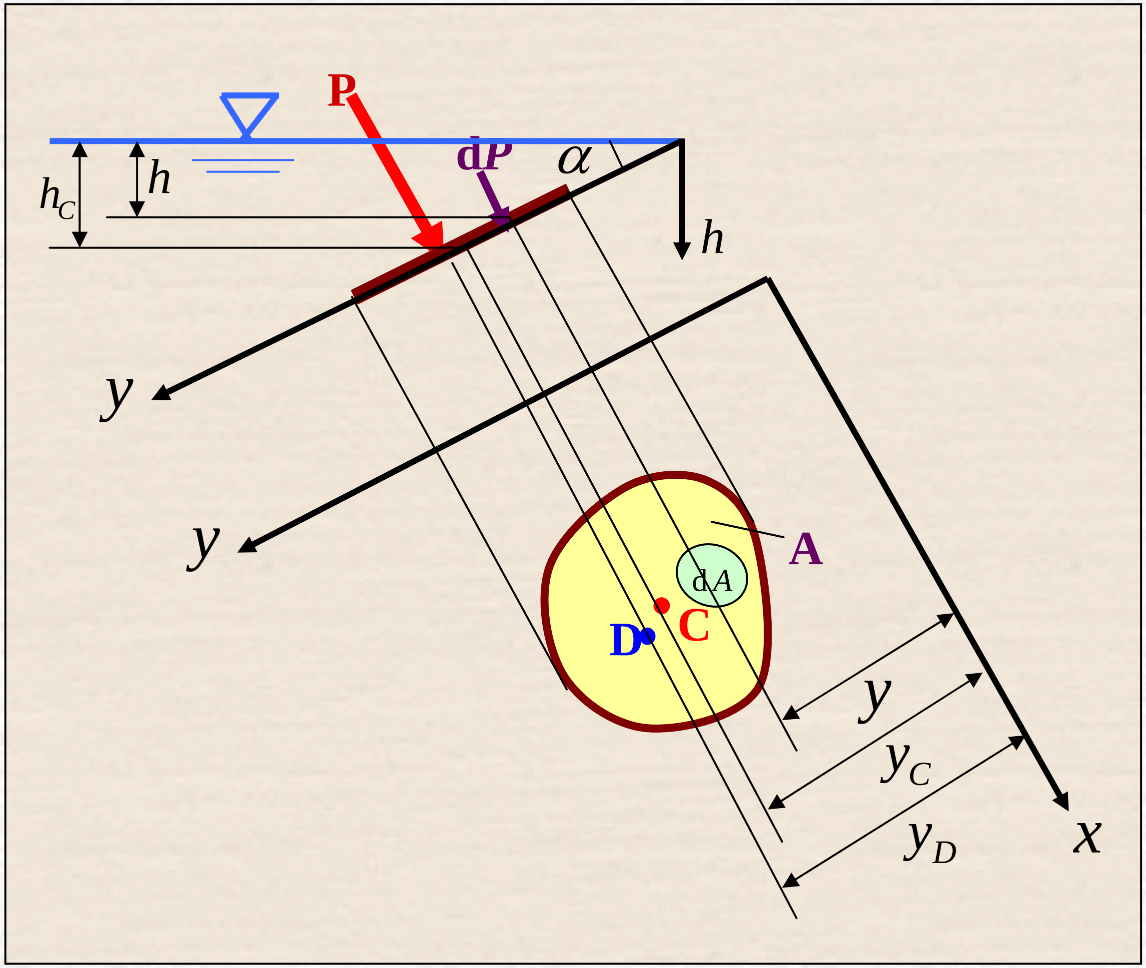
$$e=\frac{L}{3}\cdot\frac{2h+H}{h+H}$$

- 三角形压力分布图的形心距底

$$e=\frac{L}{3}$$



2. 分析法求任意形状平面上的静水总压力



➢ 总压力的大小

$$P=\iint_A \gamma h\,\mathrm{d}A$$

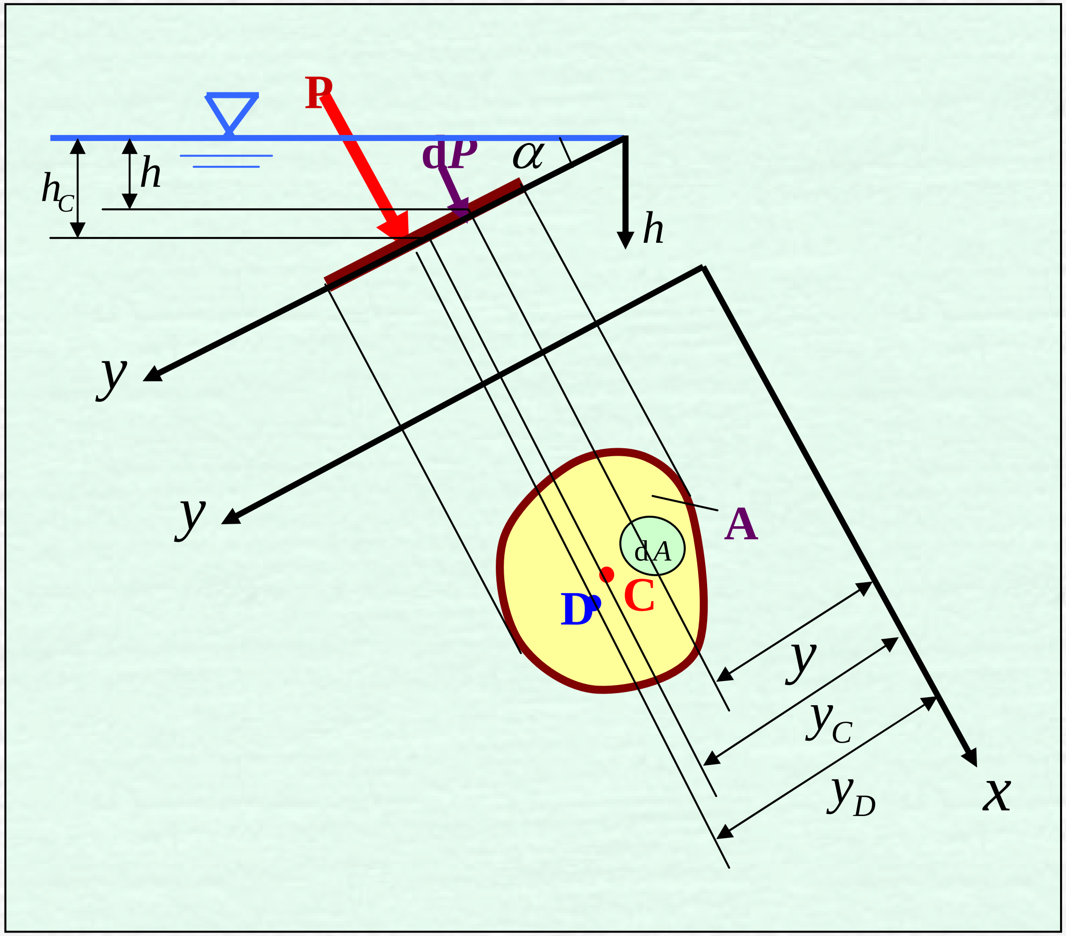
$$=\gamma\sin\alpha\cdot\iint_A y\,\mathrm{d}A$$

$$=\gamma\sin\alpha\cdot y_C\cdot A$$

$$=\gamma h_C\cdot A$$

$$=p_C\cdot A$$

总压力的作用点



$$P \cdot y_D = \iint_A \gamma h \cdot y \, \mathrm{d}A$$

$$= \gamma \sin\alpha \cdot \iint_A y^2 \, \mathrm{d}A$$

$$= \gamma \sin\alpha \cdot I_0$$

$$= \gamma \sin\alpha \cdot (I_C + y_C^2 A)$$

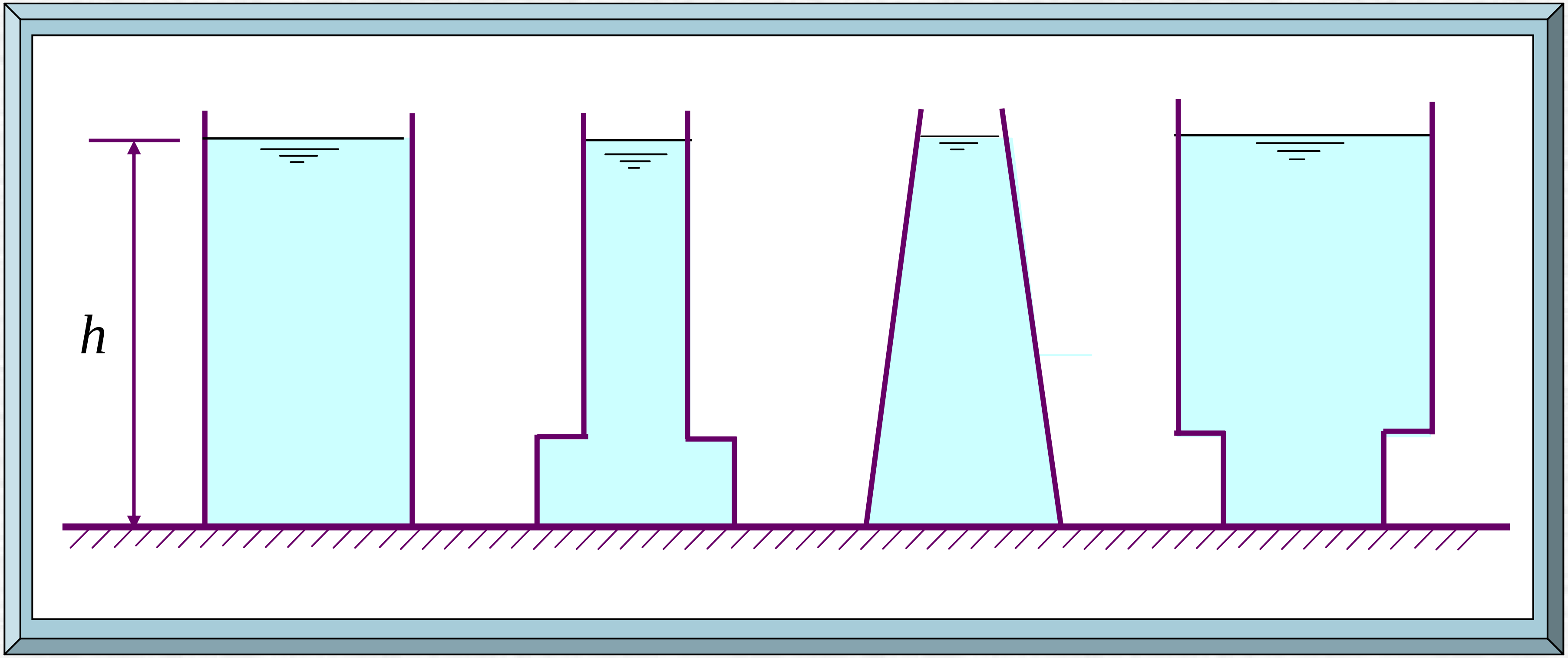
$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A}$$

结论：

1. 平面上静水压强的平均值为作用面（平面图形）形心处的压强。总压力大小等于作用面形心 C 处的压强 p_C 乘上作用面的面积 A .

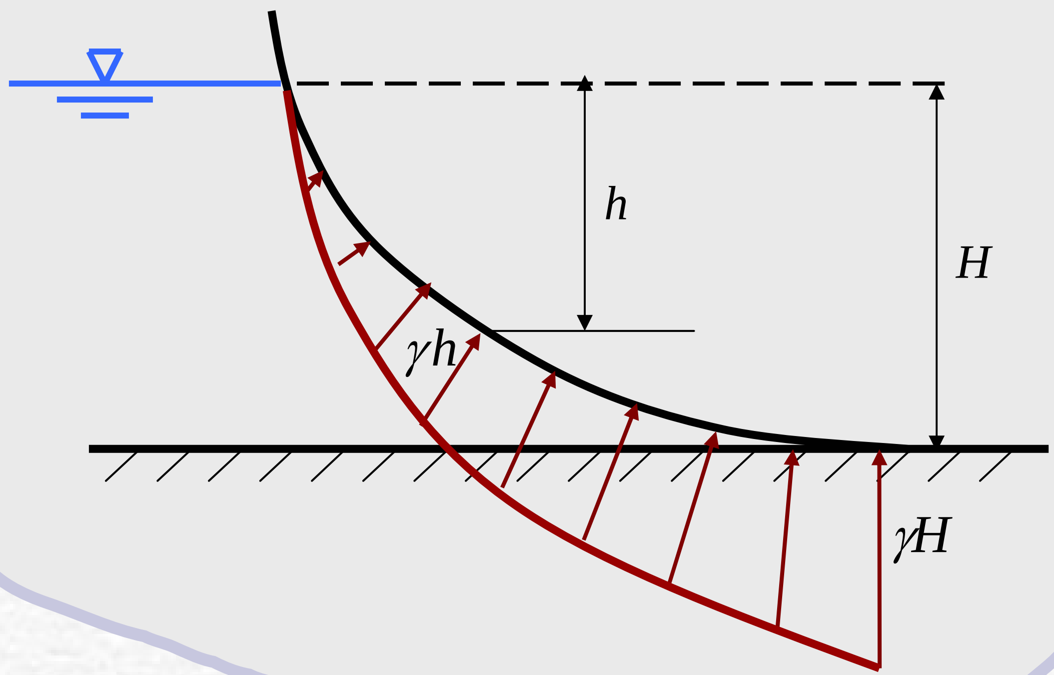
2. 平面上均匀分布力的合力作用点将是其形心，而静压强分布是不均匀的，浸没在液面下越深处压强越大，所以总压力作用点位于作用面形心以下。

➢ 静力奇象



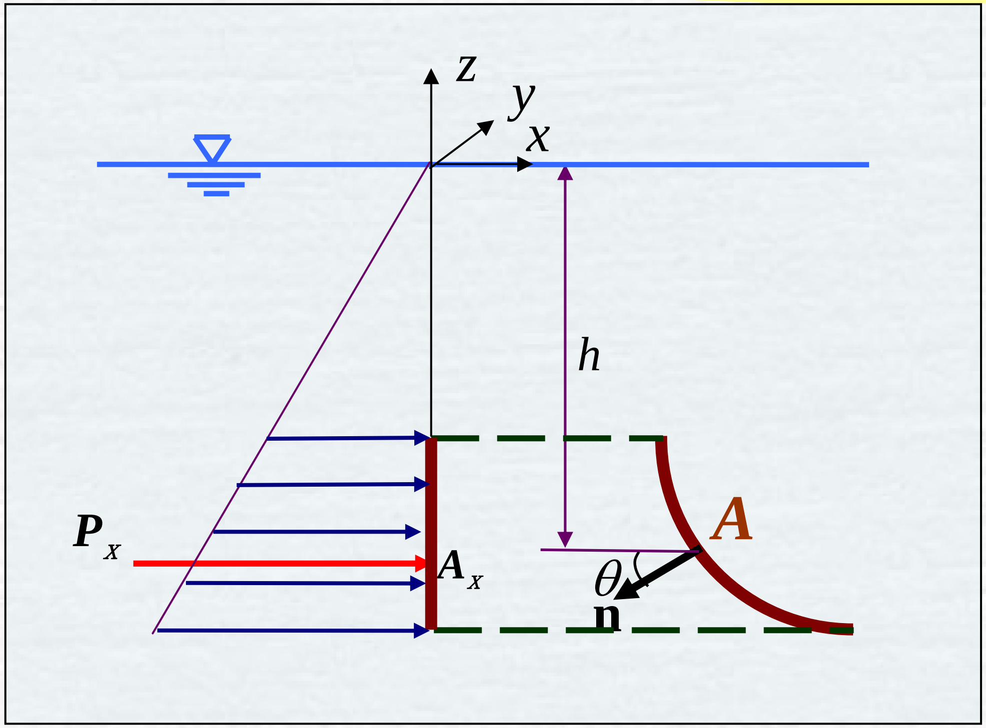
二. 静止液体作用在曲面上的总压力

- 由于曲面上各点的法向不同，对曲面 **A** 求解总压力 $\iint_A p\mathbf{n}\,\mathrm{d}A$ 时，必须先分解成各分量计算，然后再合成。



•x 方向水平力的大小

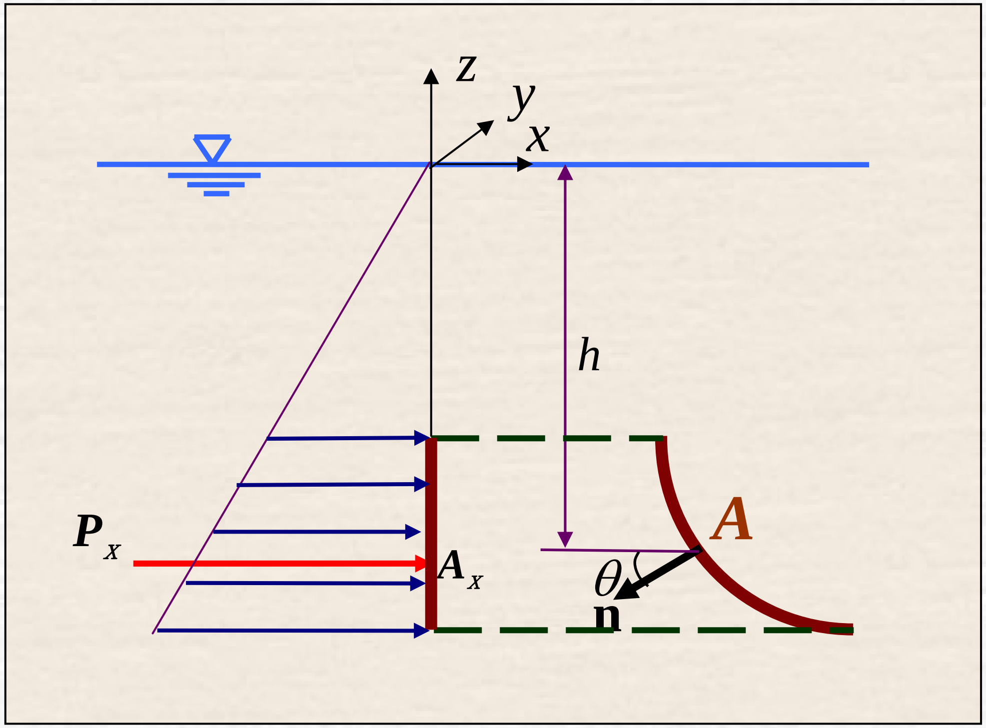
$$P_x = \iint_A p|n_x| \,\mathrm{d}A = \gamma \iint_A h \cdot \cos\theta \cdot \mathrm{d}A = \gamma \iint_{A_x} h \cdot \mathrm{d}A_x = \gamma h_{xC} A_x$$



A_x 是曲面 **A** 沿 **x** 轴向 oyz 平面的投影，h_{xC} 是平面图形 A_x 的形心浸深。

➢ 结论：

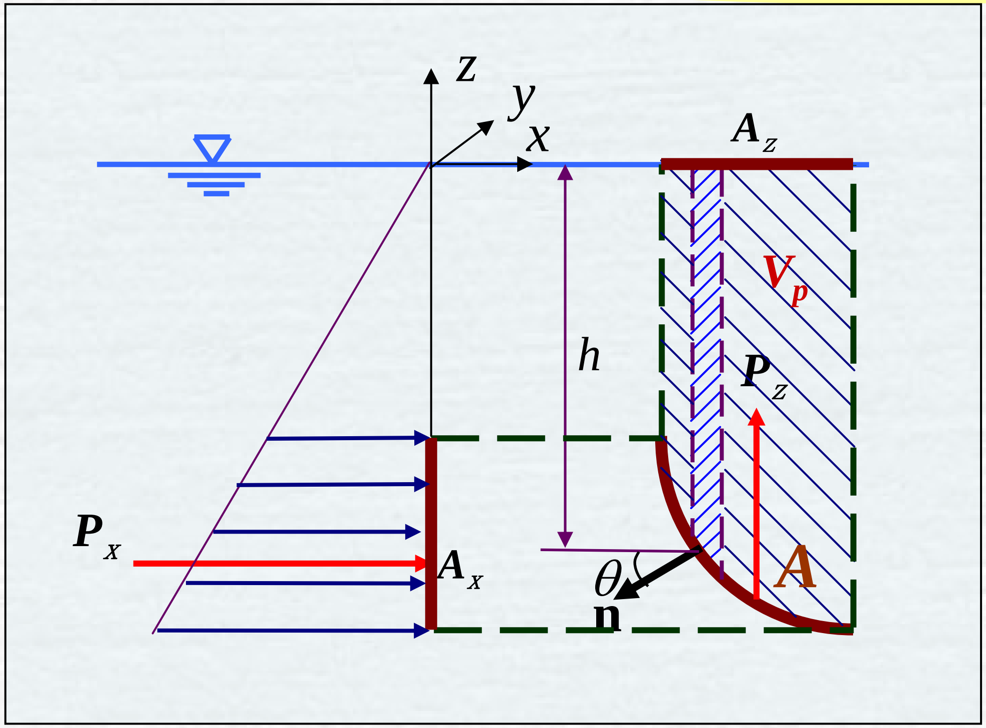
静止液体作用在曲面上的总压力在 *x* 方向分量的大小等于作用在曲面沿 *x* 轴方向的投影面上的总压力。



- *y* 方向水平力大小的算法与 *x* 方向相同。

• z 方向水平力的大小

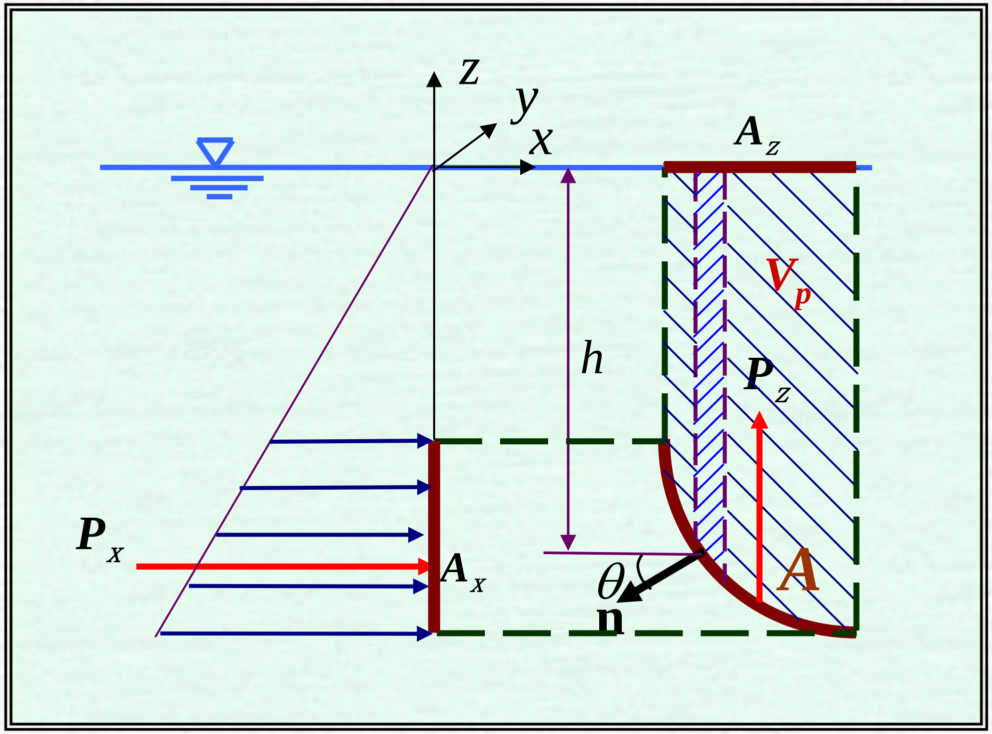
$$P_z = \iint_A p\left|n_z\right| \mathrm{d}A = \gamma \iint_A h \cdot \sin\theta \cdot \mathrm{d}A = \gamma \iint_{A_z} h \cdot \mathrm{d}A_z = \gamma V_p$$



A_z 是曲面 A 沿 z 轴向 oxy 平面的投影，V_p 称为压力体，是曲面 A 与 A_z 之间的柱体体积。

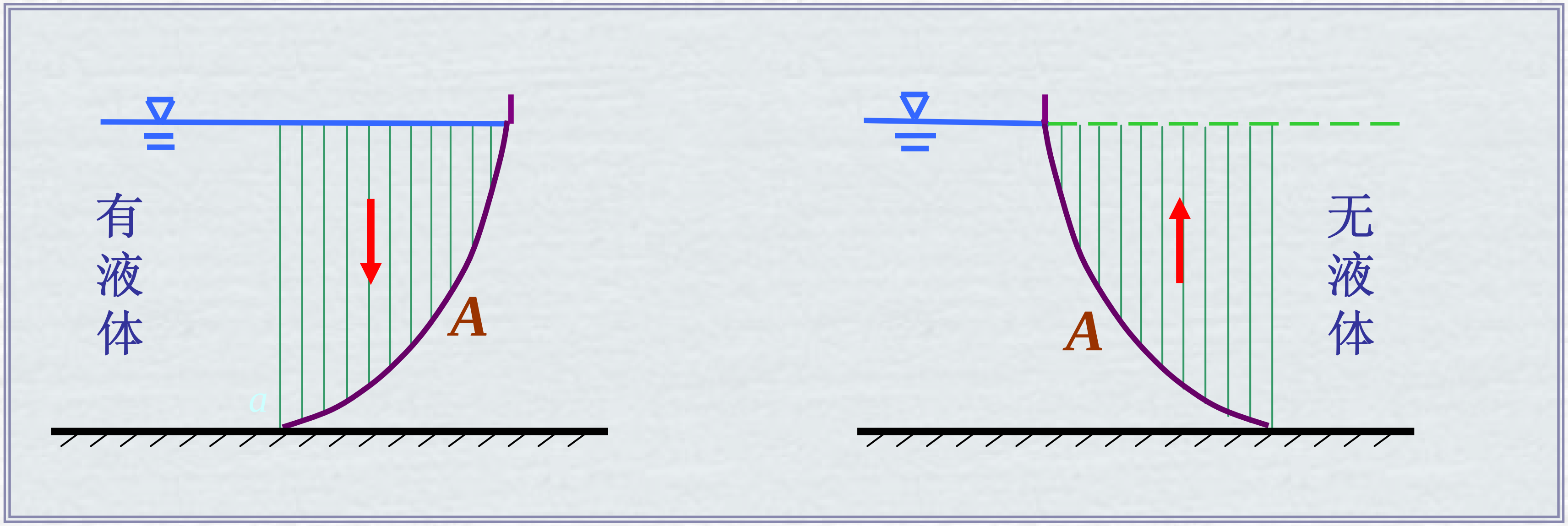
➢ 结论：

静止液体作用在曲面上的总压力的垂向分量的大小等于压力体中装满此种液体的重量。

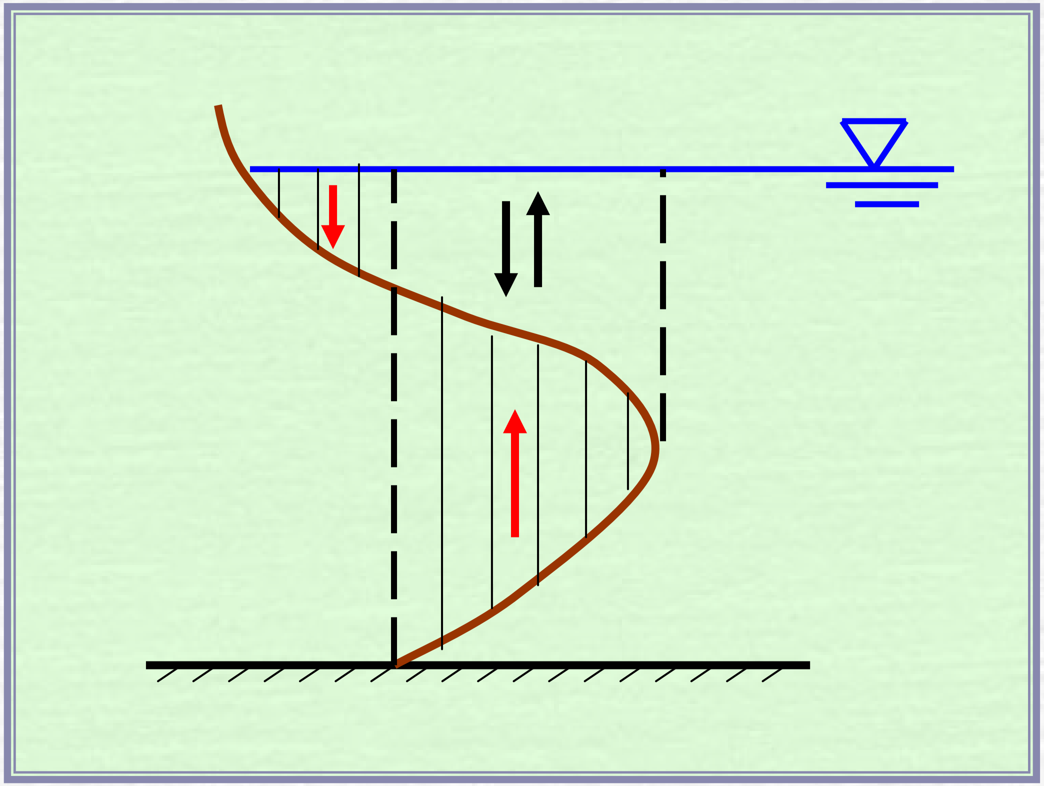


总压力垂向分量的方向根据情况判断。

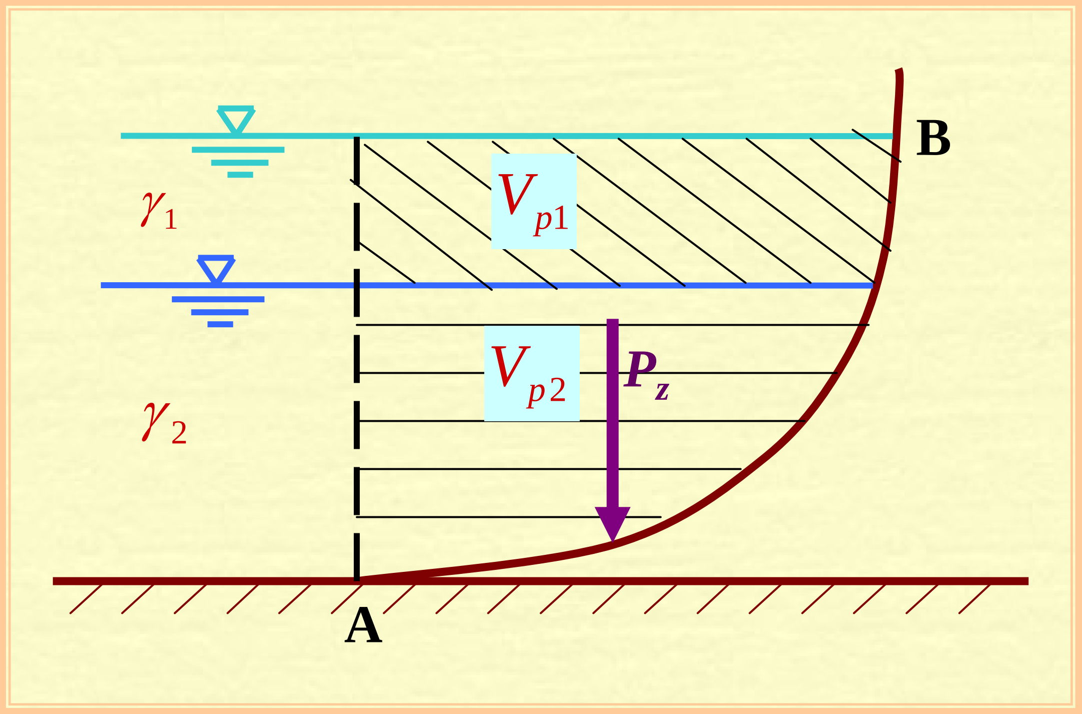
➢ 压力体应由曲面 ***A*** 向上一直画到液面所在平面。压力体中，不见得装满了液体。



➢ 复杂柱面的压力体



➢ 严格的压力体的概念是与液体重度 γ 联系在一起的，这在分层流体情况时，显得尤为重要。



***AB*面所受垂向力**

$$P_z = \gamma_1 V_{p1} + \gamma_2 V_{p2}$$

曲面上静水总压力的合成

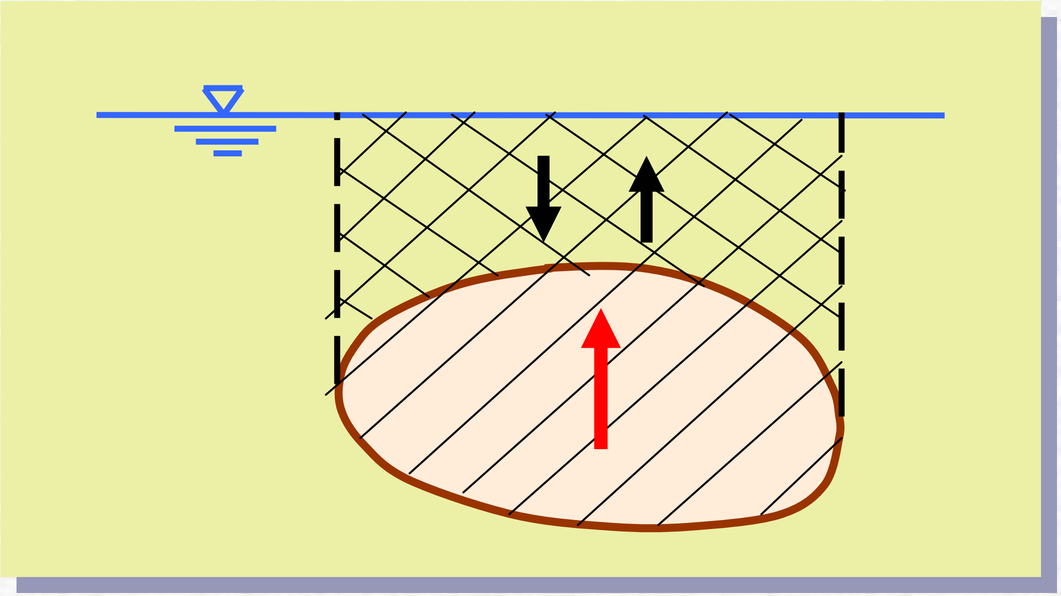
- 总压力各分量的大小已知，指向自己判断，这样总压力的大小和方向就确定了。

- 总压力的作用点为水平方向两条作用线和过压力体形心的铅垂线的交点。

- 特别地，当曲面是圆柱或球面的一部分时，总压力是汇交力系的合成，必然通过圆心或球心。

三. 静止液体作用在物体上的总压力 —— 浮力

阿基米德定律



静止液体作用在物体上总压力 — 浮力的大小等于物体所排开液体的重量，方向铅垂向上，作用线通过物体被液体浸没部分体积的形心 — 浮心。