

## 第七章 实际流体的流动

❖ 由于粘性的影响，实际流体的流动会呈现出两种不同的型态——层流和紊流，它们的流场结构和动力特性区别很大，必须加以判别，并分别研究。

❖ 不可压缩实际流体的层流流动可直接从 N-S 方程出发求解，但能得到解析解的实例是极少的，平行平板间和圆管中的均匀流是其中的两个。

❖ 在紊流流场中存在随机的脉动量，须对瞬时量取统计平均，分别讨论平均流动和脉动量。

❖ 不可压缩实际流体紊流平均流动的运动方程（雷诺方程）的应力项中含有脉动量的贡献（雷诺应力）。须用半经验理论建立雷诺应力与平均流速的关系，才能使方程封闭。

❖ 讨论壁面附近紊流切应力的特性，给出紊流流速的对数分布律。为后面的管道水力计算和边界层两章作准备。

## 实际流体流动的基本特性

◆ 有旋性

可用壁面无滑移条件解释

◆ 扩散性

涡量不再具有保持性，有向无旋区域扩散，趋于均匀的趋势

◆ 耗散性

粘性耗散能量

# 第七章 实际流体的流动

§ 7—1 流动的两种型态

§ 7—2 层流流动

§ 7—3 紊流流动

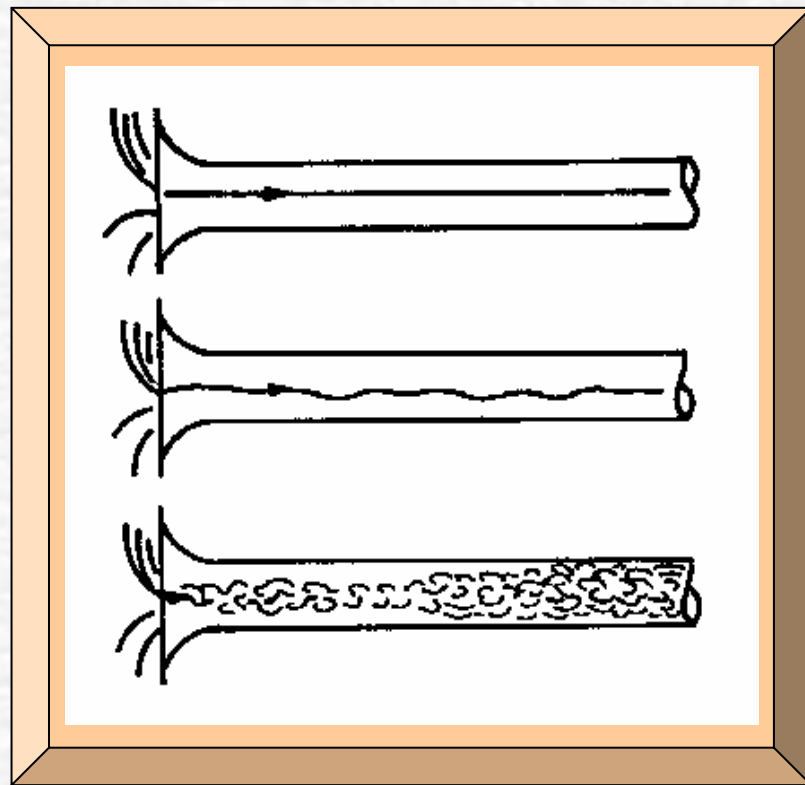
§ 7—4 圆管中的紊流流动





## § 7—1 流动的两种型态

实际流体的流动会呈现出两种不同的型态：层流和紊流，它们的区别在于：流动过程中流体层之间是否发生混掺现象。在紊流流动中存在随机变化的脉动量，而在层流流动中则没有。



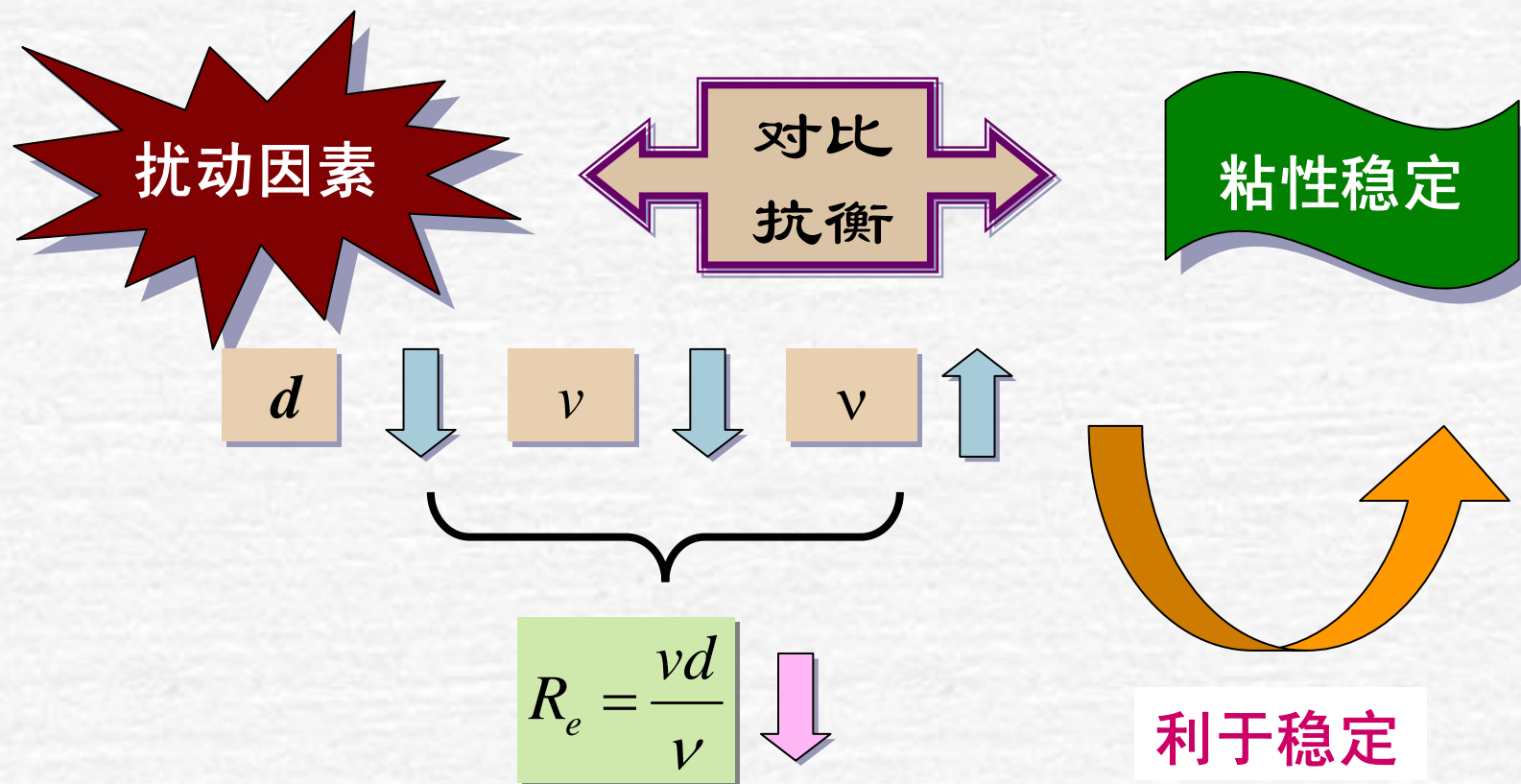
1883年，雷诺试验表明：圆管中恒定流动的流态转化取决于雷诺数

$$R_e = \frac{vd}{\nu}$$

$d$  是圆管直径， $v$  是断面平均流速， $\nu$  是流体的运动粘性系数。

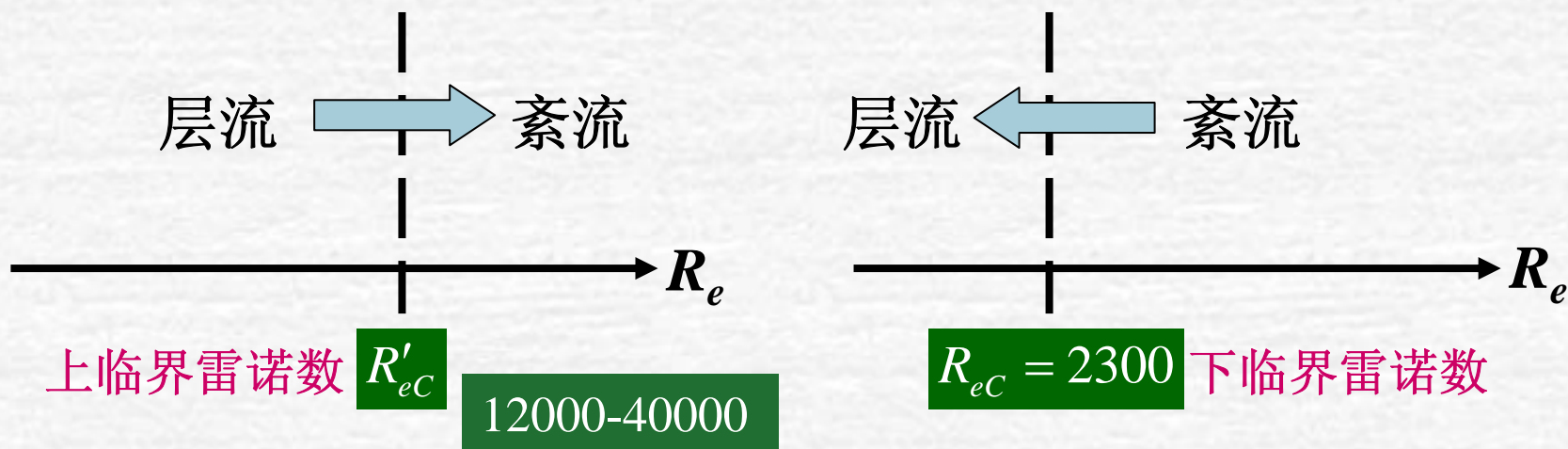
实际流体的流动之所以会呈现出两种不同的型态是扰动因素与粘性稳定作用之间对比和抗衡的结果。针对圆管中恒定流动的情况，容易理解：减小  $d$ ，减小  $v$ ，加大  $\nu$  三种途径都是有利的流动稳定的。综合起来看，小雷诺数流动趋于稳定，而大雷诺数流动稳定性差，容易发生紊流现象。





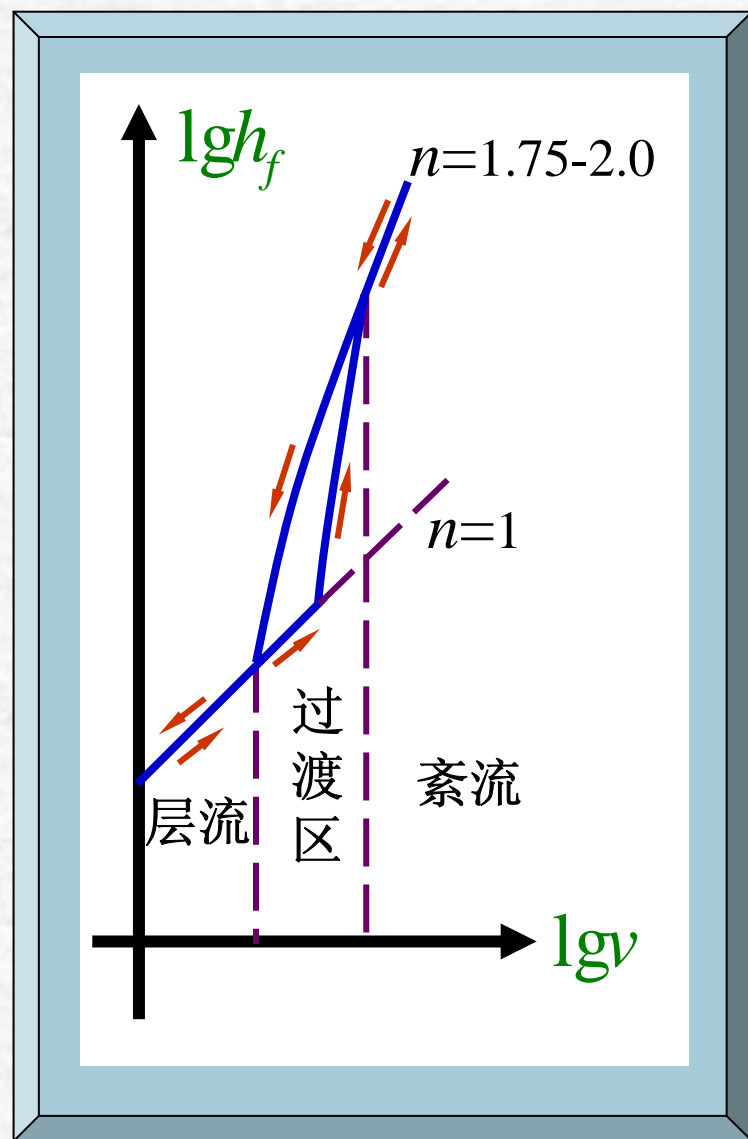
圆管中恒定流动的流态转化仅取决于雷诺数，这是客观规律用无量纲量表达的又一例证，也是粘性相似准则的实际应用。

圆管中恒定流动的流态发生转化时对应的雷诺数称为临界雷诺数，又分为上临界雷诺数和下临界雷诺数。上临界雷诺数表示超过此雷诺数的流动必为紊流，它很不确定，跨越一个较大的取值范围。有实际意义的是下临界雷诺数，表示低于此雷诺数的流动必为层流，有确定的取值，圆管定常流动取为  $R_{eC} = 2300$





由于两种流态的流场结构和动力特性存在很大的区别，对它们加以判别并分别讨论是十分必要的。例如，我们将会学到圆管中定常流动的流态为层流时，沿程水头损失与平均流速成正比，而紊流时则与平均流速的1.75~2.0次方成正比。利用这一点来判别流态比用肉眼直接观察更可靠、更科学。

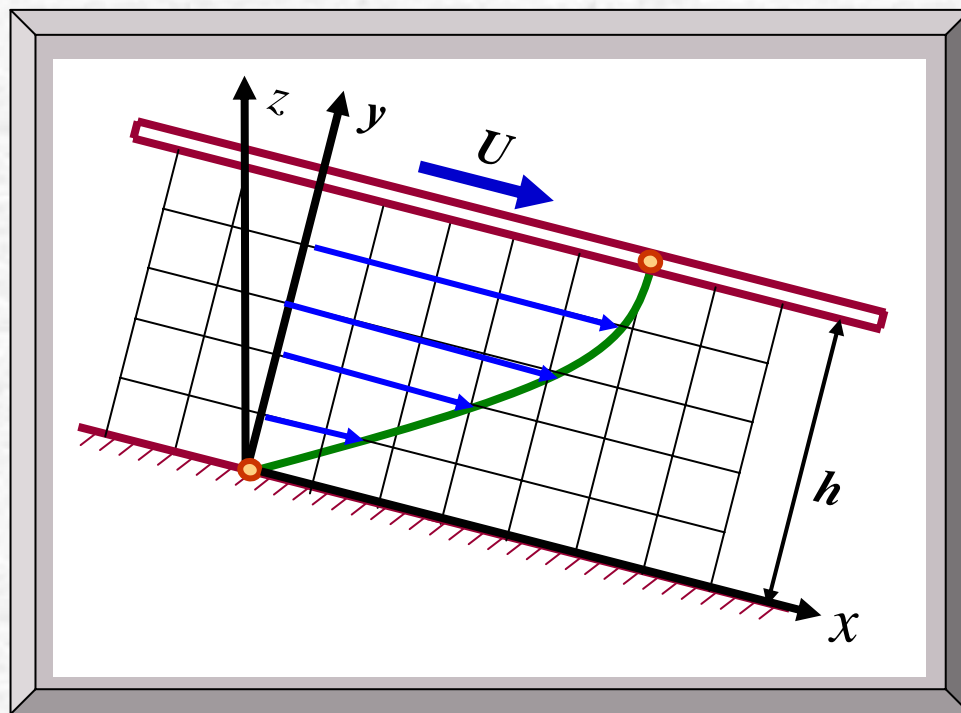


## § 7—2 层流流动

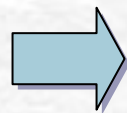
层流流动可直接从 **N-S** 方程出发求解，但一般来说是很困难的，只有在极少数情况下才有解析解。下面给出两个例子。

### 一. 两平行平板间不可压流体的层流流动（Couette流）

**N-S** 方程最简单的一个解。它是  $x$ - $y$  平面上的平面流动， $u_y=0$ ， $u_x=u_x(y)$ 。流动的起因是：质量力（重力）、压差和上下板之间的相对运动。



N-S方程  $-g\mathbf{k} - \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\mathbf{u} = 0$



$$-\nabla\left(\frac{p + \gamma z}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\mathbf{u} = 0$$

记

$$p^* = p + \gamma z$$

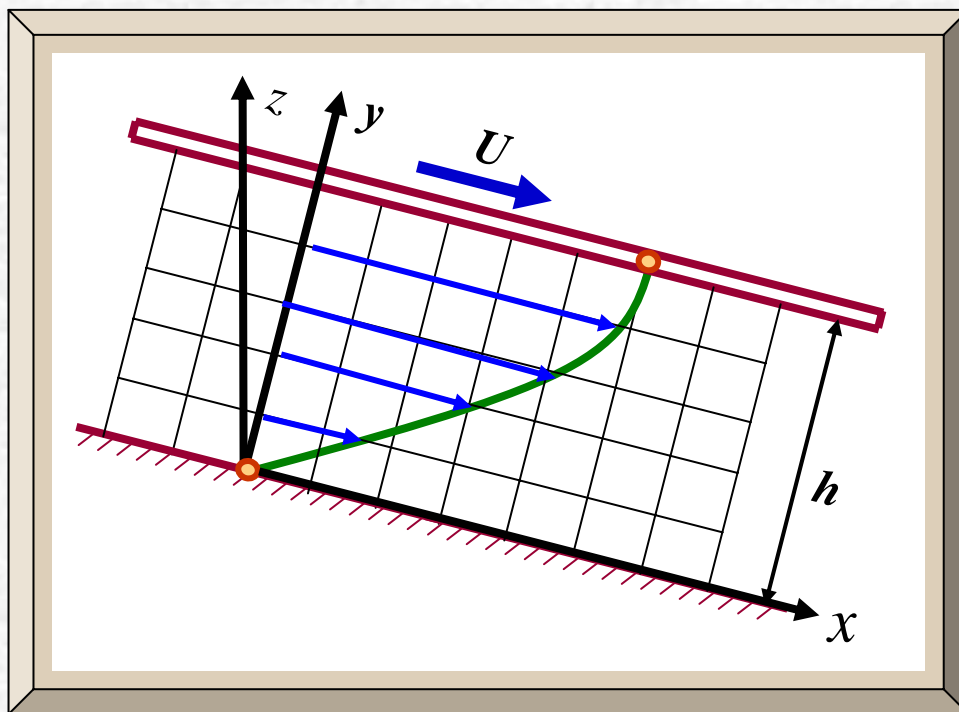
$$-\nabla\left(\frac{p^*}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\mathbf{u} = 0$$

注意  $z$  轴必须铅垂向上

分量式

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \nu \nabla^2 u_x \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d p^*}{d x} = \mu \frac{d^2 u_x}{d y^2} = \text{const}$$



直接积分，并由边界条件  $u_x(0) = 0$  和  $u_x(h) = U$ ，得：

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} y(y-h) + \frac{U}{h} y$$



无量纲化

$$\frac{u_x}{U} = -\frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp^*}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{y}{h}$$

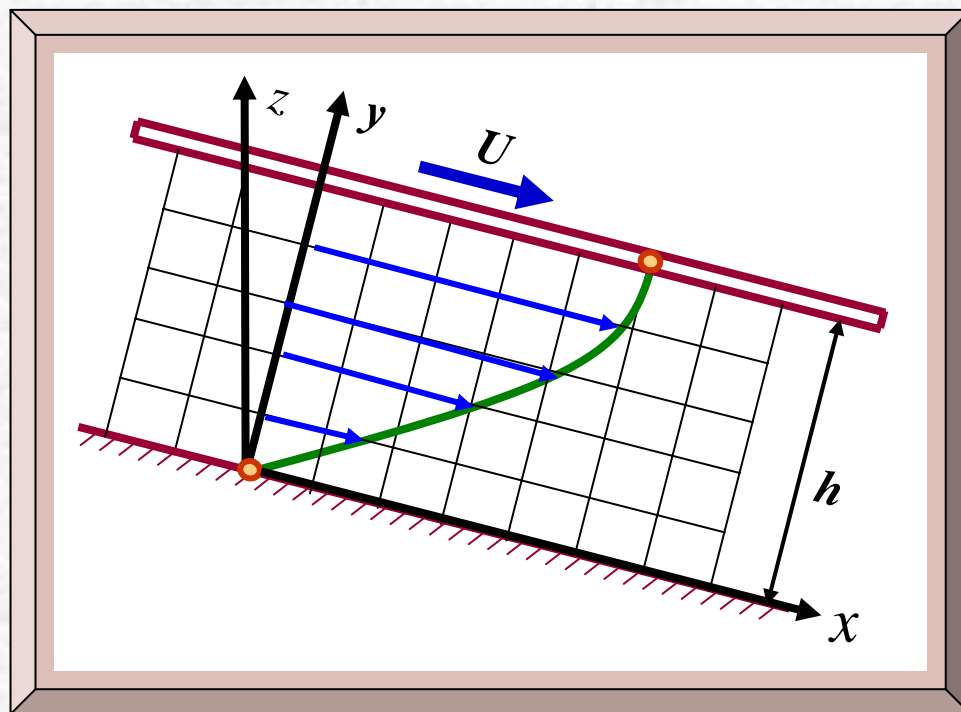
$$\frac{u_x}{U} = P \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{y}{h}$$



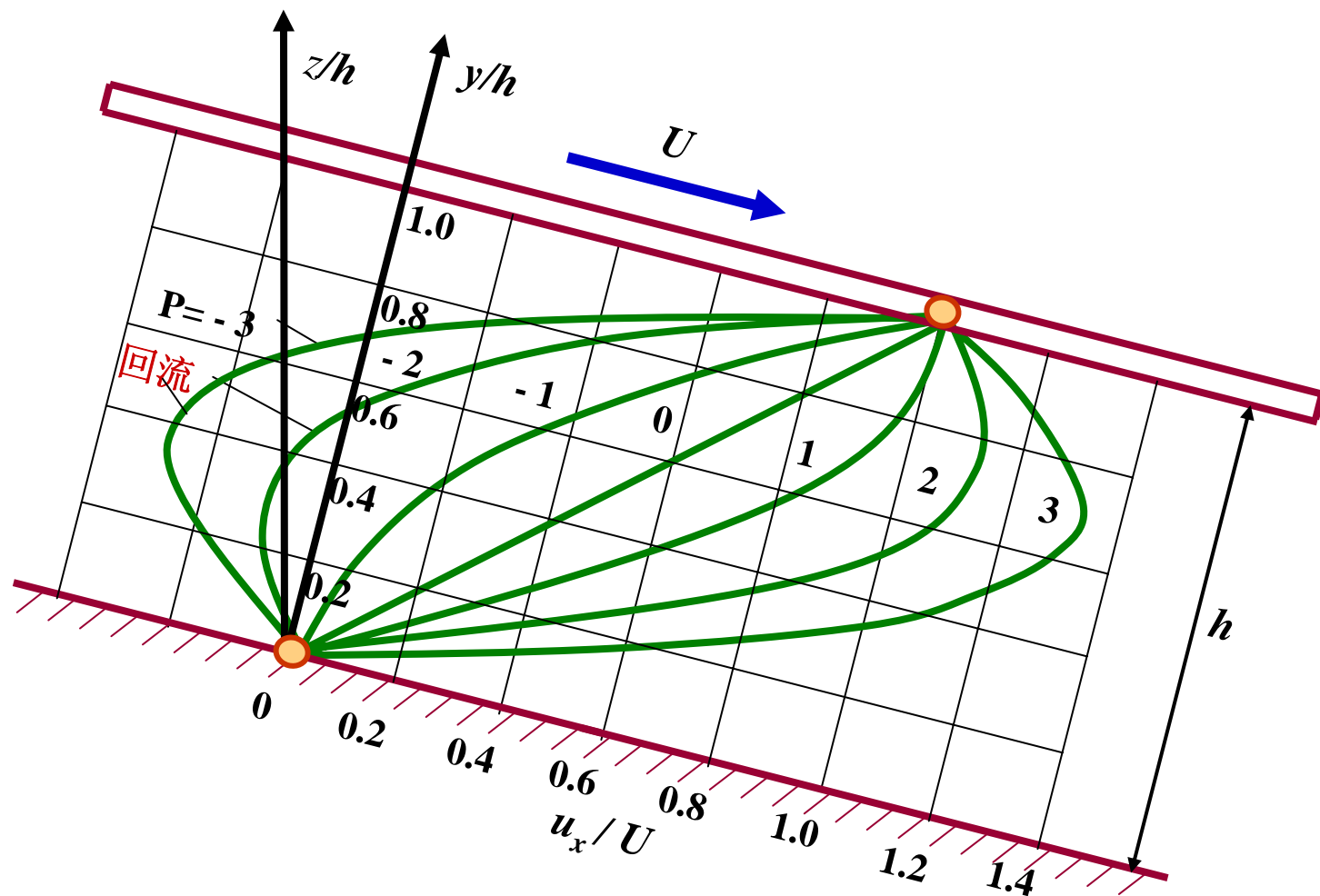
其中

$$P = -(h^2 / 2\mu U) \frac{dp^*}{dx}$$

断面流速呈抛物线分布。无量纲压力梯度  $P$  取不同值时的速度剖面如下页图所示，注意  $P < -1$  时出现的“回流”现象。







## 二. 圆管中的层流流动 (Poiseuille流)

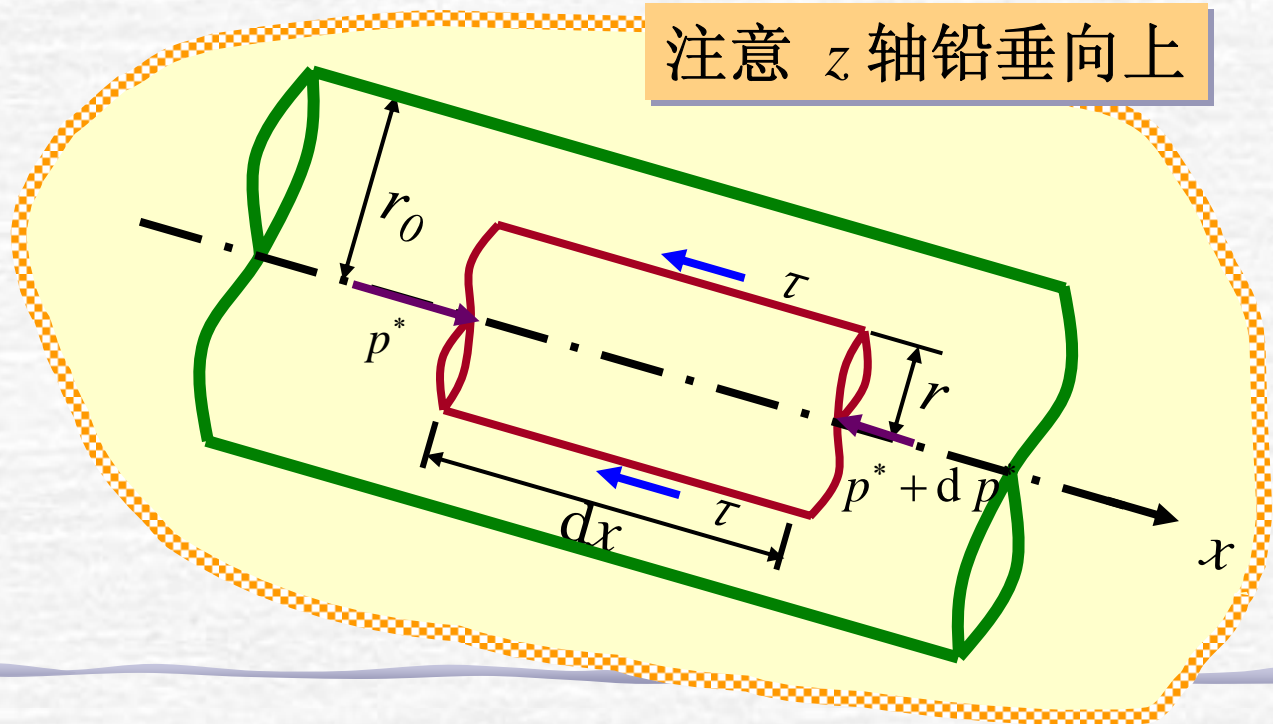
圆管中的不可压流体层流流动也是一种能够得到解析解，同时又是重要而实用的流动。它是  $x$ - $r$  子午面上的轴对称二维流动， $u_r = 0$ ， $u_x = u_x(r)$ 。流动的起因是：质量力（重力）和压

差。

记  $p^* = p + \gamma z$

直接对图示微元写出重力、压差力和粘性力的平衡方程式

注意  $z$  轴铅垂向上



$$\tau 2\pi r dx - dp^* \pi r^2 = 0$$

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{dp^*}{dx}$$

$$\mu \frac{du_x}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp^*}{dx}$$

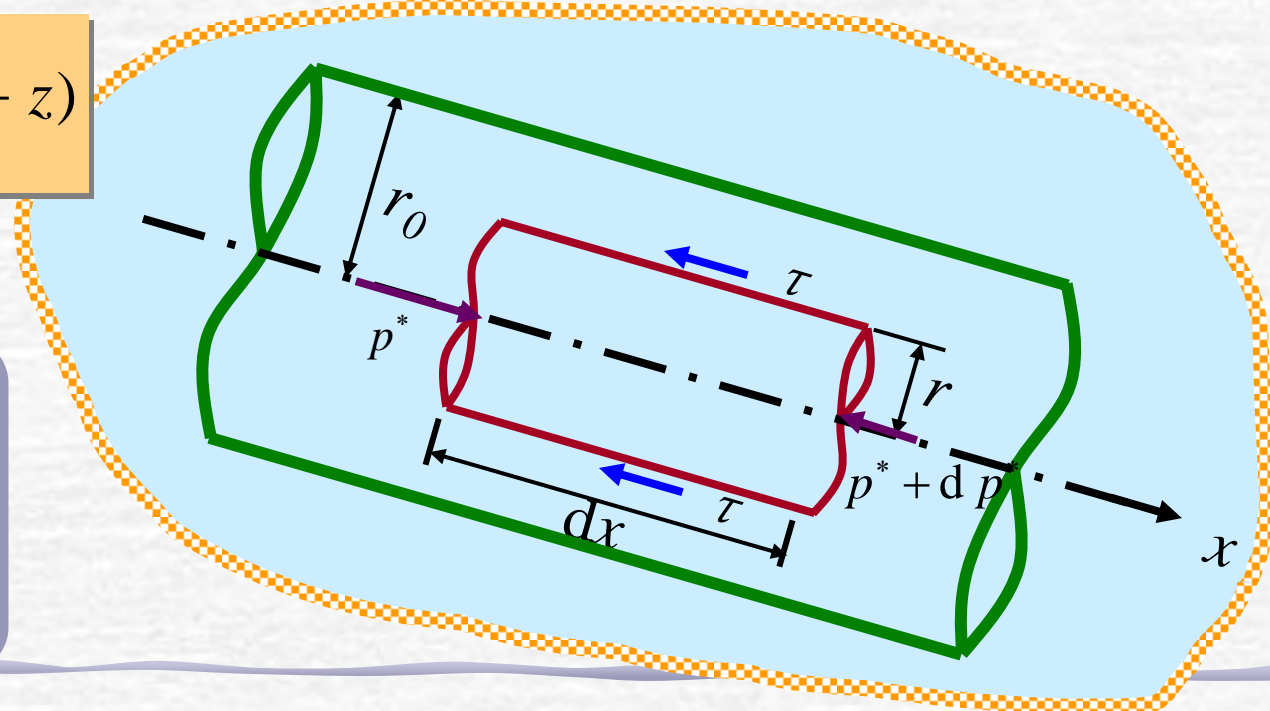
积分，并考虑到边界条件  $u_x(r_0) = 0$ ，得

$$u_x(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} (r_0^2 - r^2) = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$$

式中

$$J = -\frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\gamma} + z \right)$$

测管水头线沿程下降率，也是总水头沿程下降率，即水力坡度



断面流速是旋转抛物面分布

$$u_x(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{d p^*}{d x} (r_0^2 - r^2) = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$$

切应力是线性分布

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{d p^*}{d x}$$

易于得到流量

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0} u_x(r) r dr = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \left(-\frac{d p^*}{d x}\right)$$

管壁处切应力大小

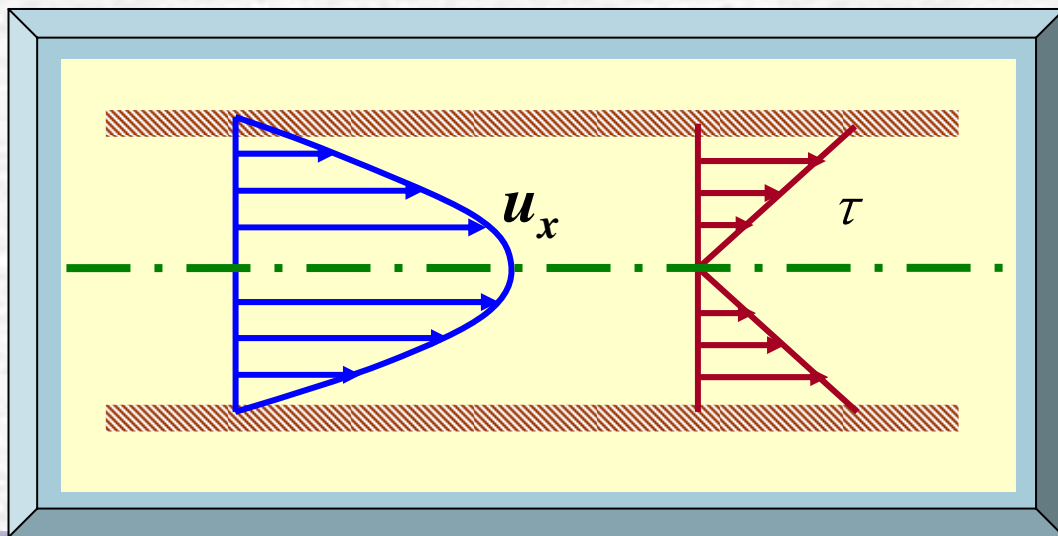
$$\tau_0 = -\mu \left. \frac{d u_x}{d r} \right|_{r=r_0} = \frac{r_0}{2} \left(-\frac{d p^*}{d x}\right) = \frac{\gamma r_0 J}{2}$$

管轴处流速最大

$$u_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{d p^*}{d x} r_0^2$$

平均流速

$$v = Q / \pi r_0^2 = \frac{1}{2} u_{\max}$$





## 以上两个例子中值得注意的问题

$$p^* = p + \gamma z$$

$z$  轴铅垂向上

综合了压差和重力的作用

以上两个均匀流的例子中流速的抛物线分布是层流的特征，而切应力的线性分布则并不要求层流的条件，它是直接由运动方程得到的。

$$\frac{dp^*}{dx} = \text{const}$$

均匀流的起因，均匀流要求压差是常数，而不是压强为常数。

## § 7—3 紊流流动

### 一. 紊流的发生

紊流发生的机理是十分复杂的，下面给出一种粗浅的描述。

层流流动的稳定性丧失（雷诺数达到临界雷诺数）

扰动使某流层发生微小的波动

流速使波动幅度加剧

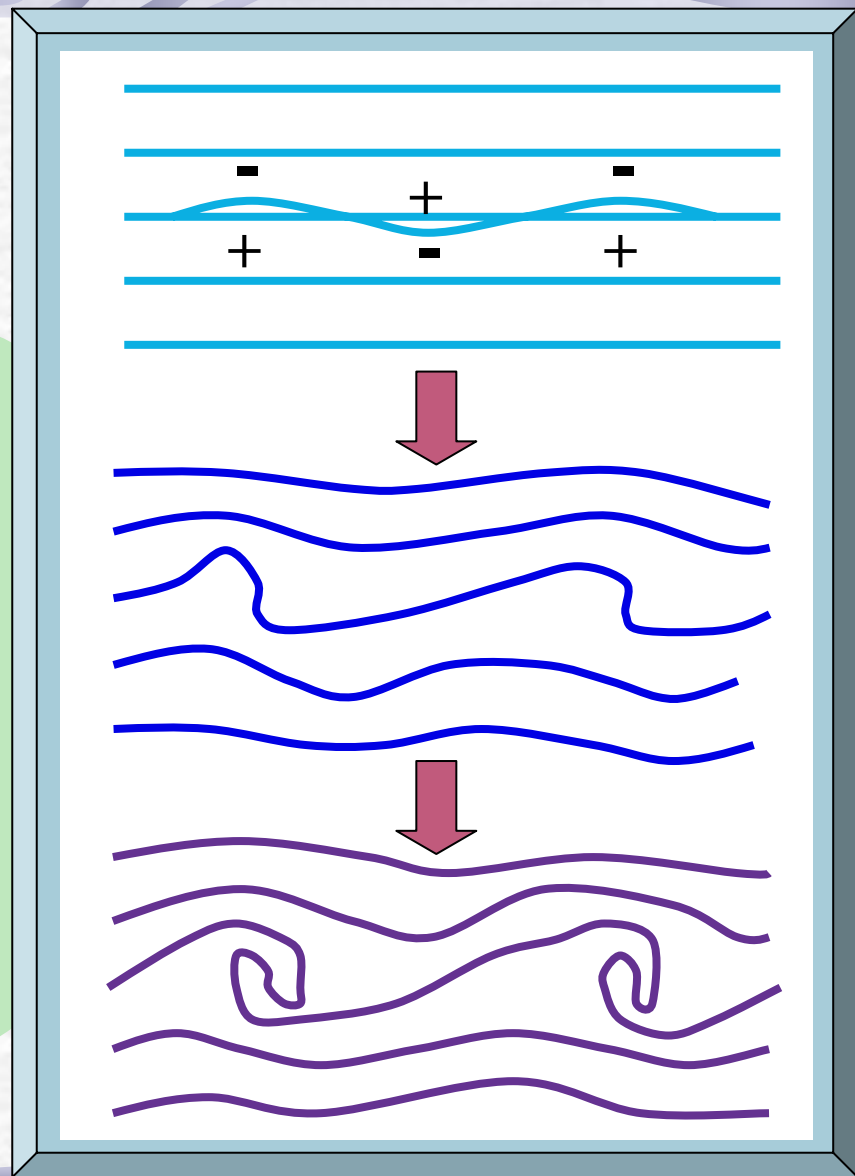
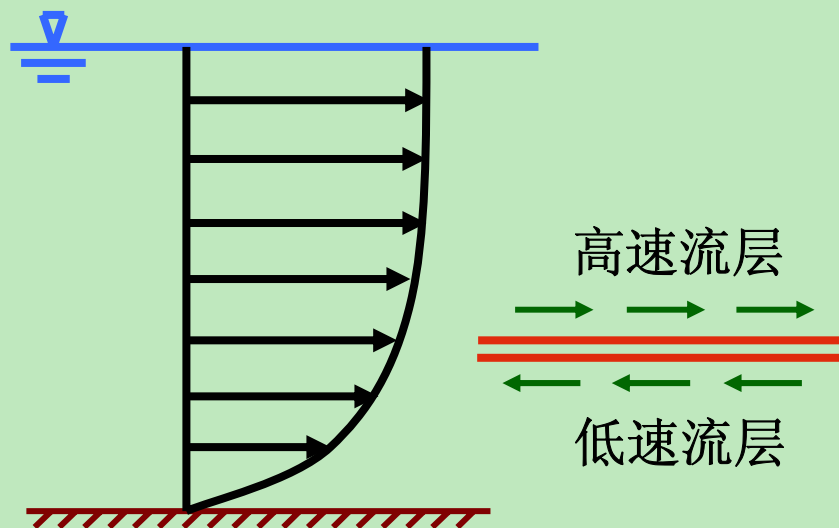
在横向压差与切应力的综合作用下形成旋涡

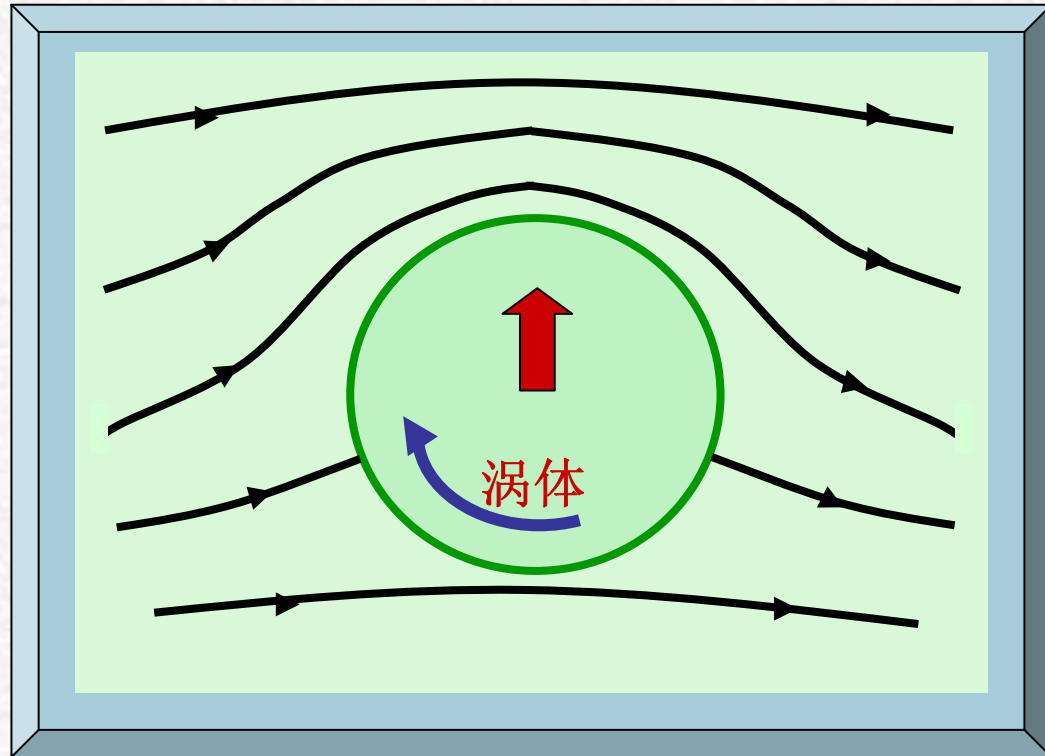
旋涡受升力而升降

引起流体层之间的混掺

造成新的扰动

任意流层之上下侧的切应力构成顺时针方向的力矩，有促使旋涡产生的倾向。





旋涡受升力而升降，产生横向运动，引起流体层之间的混掺

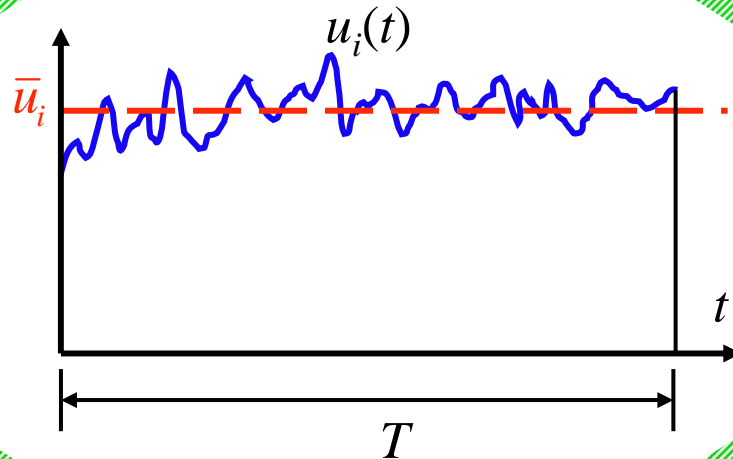


## 二. 紊流中物理量的表示

● 紊流的基本特征是有一个在时间和空间上随机分布的脉动流场叠加到本为平滑和平稳的流场上。所以对于紊流的各种物理量采用取统计平均的处理方法，把瞬时物理量看成平均量与脉动量之和，如  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

● 统计平均的方法有多种：对时间、对空间、对集合都可以取平均，在“各态历经”假设成立的前提下，一般采用时间平均法

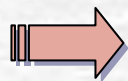
$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_0^T u_i \, dt$$



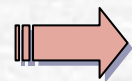
● 在对瞬时量取平均时所取的时段  $T$  应远大于脉动量的振荡周期，远小于流动涉及的时间域尺度，只有这样，才能把平均量定义在空间和时间点上。

● 脉动量的平均值为零。

$$f = \bar{f} + f'$$



$$\bar{f} = \overline{\bar{f} + f'} = \bar{f} + \overline{f'}$$



$$\overline{f'} = 0$$

● 脉动量的统计特性一般要用均方根表示，如  $\sqrt{u_i'^2}$

● 紊流流场各项物理量的平均值一般是随时间缓变的（相对于脉动量的变化而言），如果不随时间而变，则可称为“恒定”的紊流。

### 三. 紊流的基本方程

- 紊流的基本方程指的是时均流场所满足的方程，紊流流动的瞬时量仍满足连续方程和 **N-S** 方程。
- 通过对瞬时量所满足的连续方程和 **N-S** 方程两边取平均的方法可以得到紊流时均流动的连续方程和运动方程。
- 因为连续方程的各项都是线性项，取平均值后脉动量不出现。

瞬时量满足  
的连续方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

两边取平均

时均量满足  
的连续方程

$$\frac{\partial(\bar{u}_x + u'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}_y + u'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}_z + u'_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0$$

● 两瞬时量乘积的平均值中含有脉动量的乘积。

$$\overline{f_1 f_2} = \overline{(\bar{f}_1 + f_1')(\bar{f}_2 + f_2')} = \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 + \overline{f_1' \cdot f_2'}$$

● N-S 方程中的位变惯性力项是非线性的对流项，其平均值中含有脉动量的贡献。

根据瞬时量连续方程

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$



$$\frac{\partial(u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x u_z)}{\partial z}$$



$$\frac{\partial(\bar{u}_x \bar{u}_x + \overline{u_x' u_x'})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}_x \bar{u}_y + \overline{u_x' u_y'})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}_x \bar{u}_z + \overline{u_x' u_z'})}{\partial z}$$



← 根据时均量连续方程

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u_x' u_x'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_x' u_y'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u_x' u_z'}}{\partial z}$$



● 对瞬时量满足的 N-S 方程两边取平均，得到紊流时均量所满足的运动方程 — 雷诺方程。

$$\overline{\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}} = \overline{X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x}$$



$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u}_x - \left( \frac{\partial \overline{u'_x u'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_x u'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'_x u'_z}}{\partial z} \right)$$



$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}$$

||

雷诺方程

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u}_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (-\overline{\rho u'_x u'_x})}{\partial x} + \frac{\partial (-\overline{\rho u'_x u'_y})}{\partial y} + \frac{\partial (-\overline{\rho u'_x u'_z})}{\partial z} \right)$$

#### 四. 雷诺应力

● 雷诺方程中出现新增的应力  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ ，叫做紊流附加应力或雷诺应力，它是脉动流速对平均流动的贡献。

● 雷诺应力常记为

$$\tau'_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$$

共有九个量，组成二阶对称张量，其中只有六个量是独立的。

● 雷诺应力无法用解析方法确定，只能用基于试验的经验方法给出其与平均流速的关系，以使雷诺方程封闭。

## ● 从物理上说明脉动如何产生附加切应力

因y方向的脉动穿过 $dA_y$ 的质量通量

$$\rho u'_y dA_y = f(y)$$

动量通量

$$dK_x = \rho u'_y (\bar{u}_x + u'_x) dA_y$$

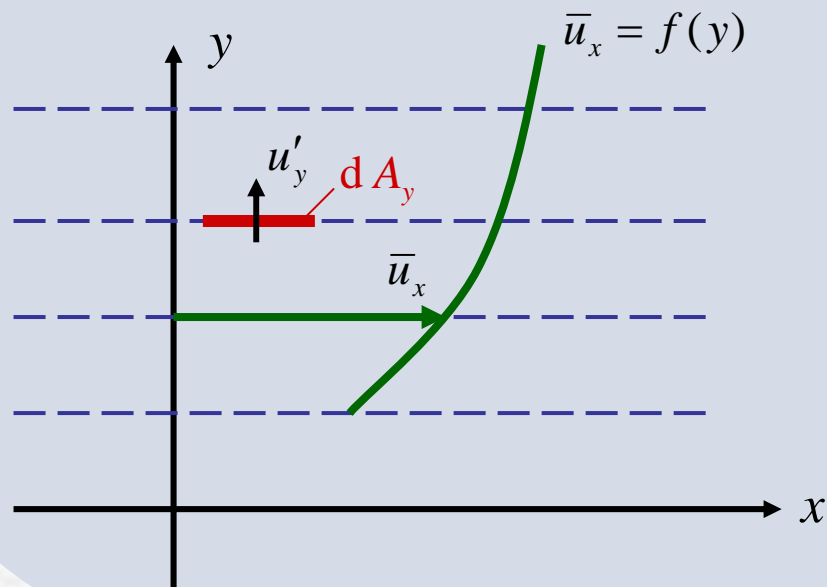
上层流体获得的动量通量时均值

$$\overline{dK_x} = \overline{\rho u'_y (\bar{u}_x + u'_x) dA_y} = \overline{\rho u'_y u'_x} dA_y$$

下层流体所受切应力

$$\tau'_{yx} = -\overline{\rho u'_y u'_x}$$

雷诺应力是流体微团的脉动造成的对时均流动新增的应力，原有的粘性应力仍然存在。



## 五. 紊流的半经验理论

- 混合长度理论是最基本的一种寻求雷诺应力与平均流速关系的半经验理论。
- 混合长度理论假设微团垂向移动  $l_1$  后，进入并与相邻流层混合，类比于分子运动的自由程。

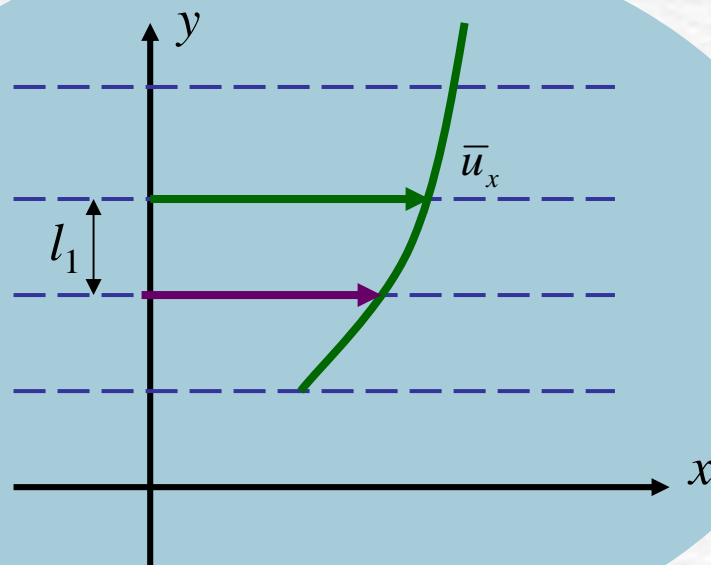
$$u'_x \approx -l_1 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \text{sgn}(u'_y)$$

$$|u'_y| \propto |u'_x|$$

$$u'_y \approx Cl_1 \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right| \text{sgn}(u'_y)$$

$l$  混合长度

$$\tau'_{yx} = -\rho \overline{u'_x u'_y} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$



● 雷诺应力代表的紊动混掺作用的结果总是使时均流动在整个断面上更加均匀化，这一点是与粘性应力的作用相同的。

● 类比于粘滞切应力，将雷诺应力写成

$$\tau'_{yx} = \mu_t \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

则时均流动的总切应力

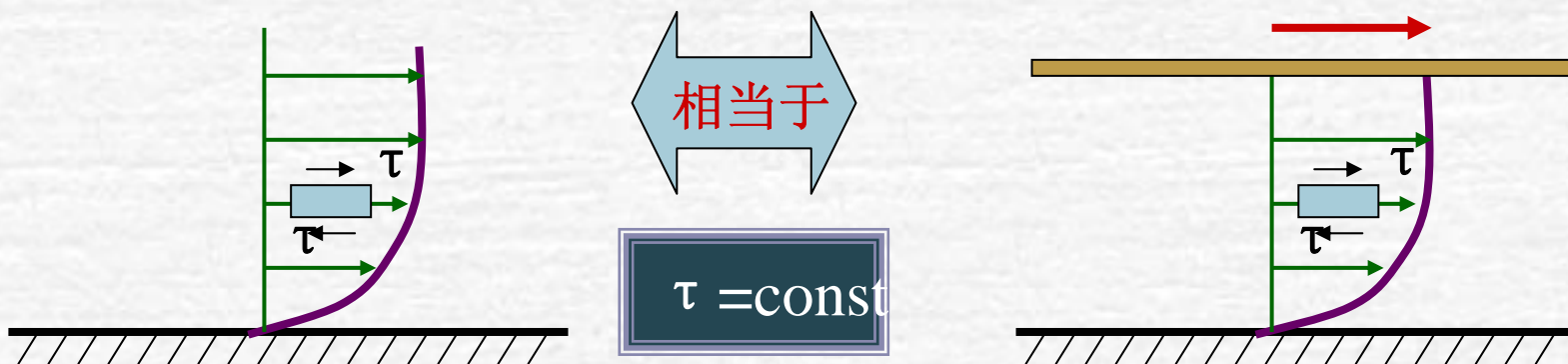
$$\tau_{yx} = (\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \left( \mu + \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right| \right) \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

可见  $\mu_t$  不仅取决于流体的物理属性，还与流动本身有关。

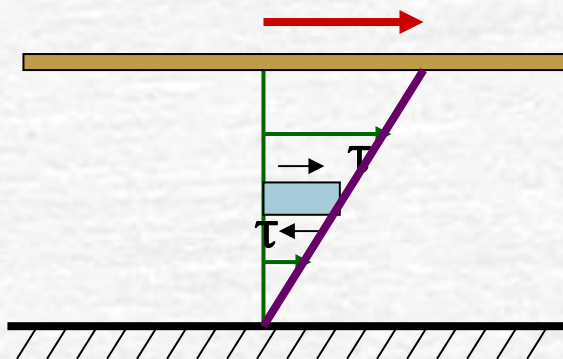


## 六. 紊流中壁面附近切应力和流速的分布

把壁面附近紊流时均流动看作由主流带动的无压均匀流



若是层流



$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy} = \text{const}$$

导致  $u_x$  的线性分布

而在紊流情况下

$$\tau = \text{const}$$

并不能导致  $u_x$  的线性分布



$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \text{const}$$

非常数



$$\frac{d\bar{u}_x}{dy} = \text{const}$$

为了能在紊流情况下，由已知的总切应力分布得到时均流速分布，做以下工作：

● 决定混合长度的取值：根据试验结果，对于固壁（ $y=0$ ）附近的流动，有  $l = \kappa y$ ，于是

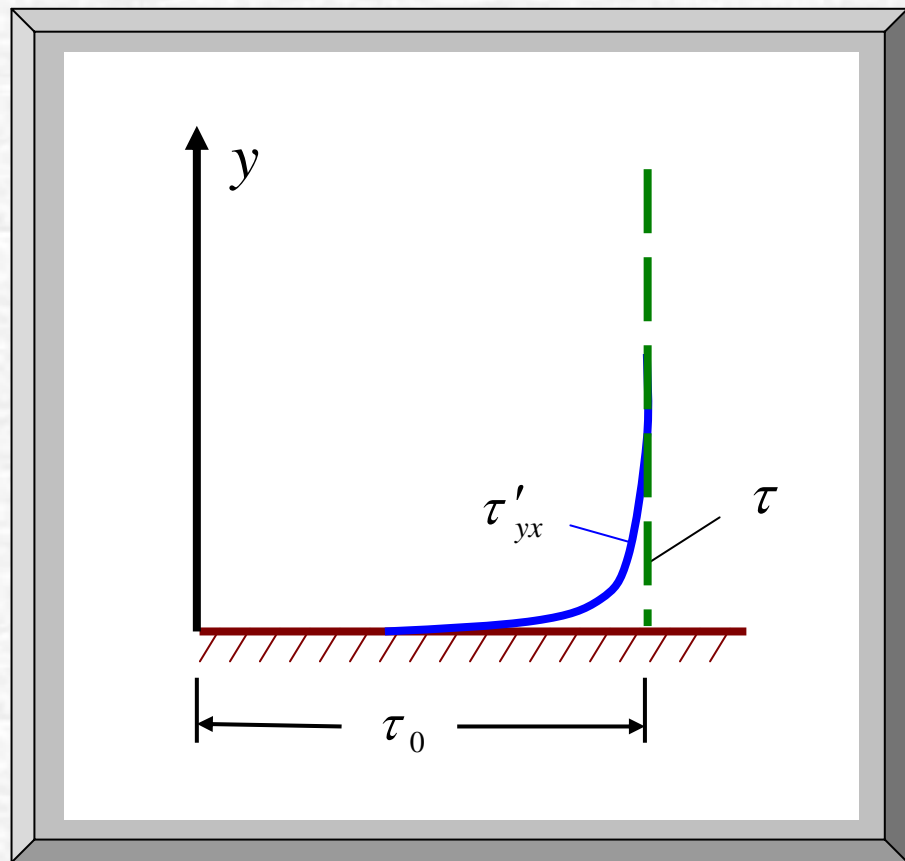
$$\tau_{yx} = \left( \mu + \rho \kappa^2 y^2 \left| \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right| \right) \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

一般取

$$\kappa = 0.4$$

## ● 讨论雷诺应力和粘性应力在总切应力中所占比重的分配

在大雷诺数情况下，紊流时均流动中雷诺应力比起粘性应力是占主导地位的，但是紧贴着物面，即使时均流速梯度很大，而脉动流速受壁面制约趋于零（公式中  $y \rightarrow 0$ ,  $l \rightarrow 0$ ），所以情况将反过来，其中的流动为层流。这一层叫做粘性底层或层流底层。

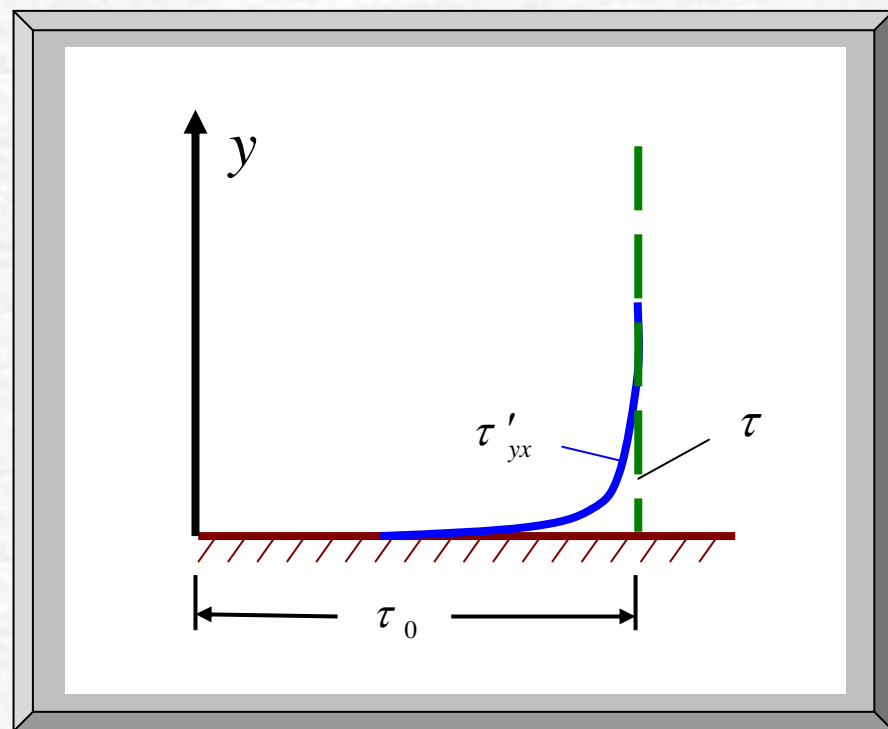


● 在粘性底层，粘性应力占主导地位。特别地，壁面上雷诺应力为零，总切应力完全是粘性应力。若总切应力沿断面分布为常数，则该常数即为壁面上的粘性应力。

$$\tau = \text{const} = \tau_0$$

● 鉴于壁面切应力的重要性，定义壁面切应力与密度之比的开方为摩阻流速

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$



● 固壁附近，离粘性底层以远一定距离后，雷诺应力占主导地位，粘性应力则可以忽略，此时雷诺应力近似等于总切应力，即壁面切应力。

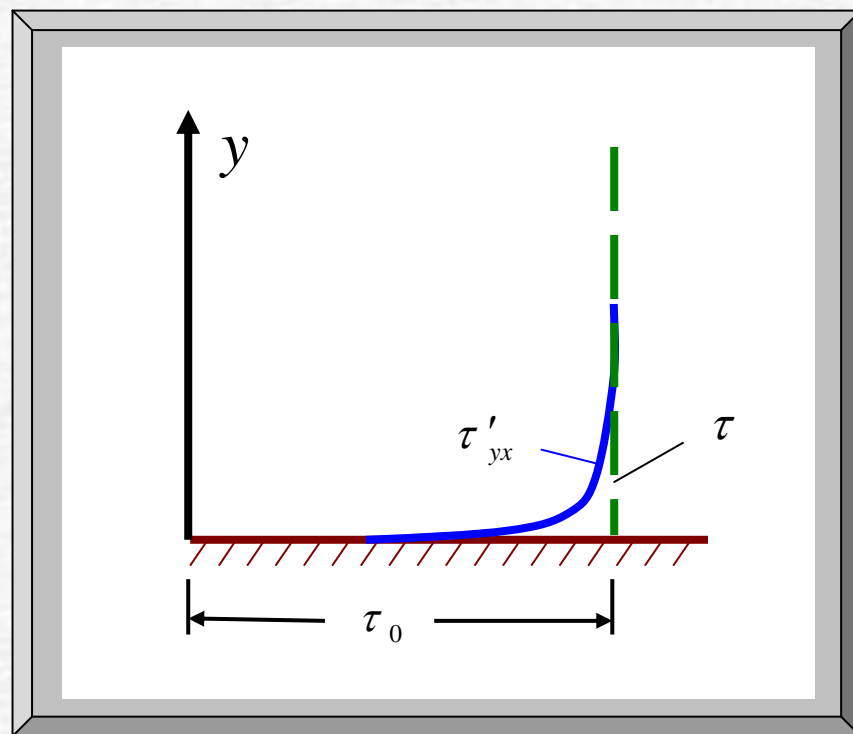
$$\tau'_{yx} \approx \tau = \tau_0$$

$$\rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{d \bar{u}_x}{d y} \right)^2 = \tau_0$$

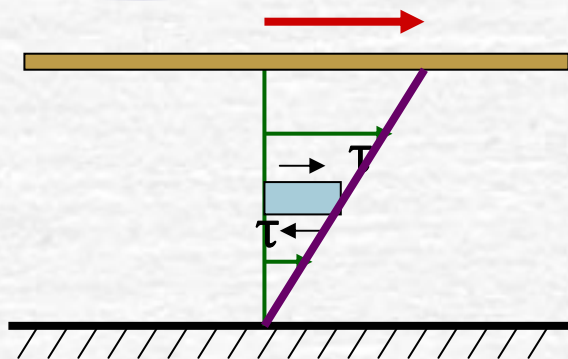
$$\frac{d \bar{u}_x}{d y} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{v_*}{\kappa y}$$

积分易得对数流速分布律：

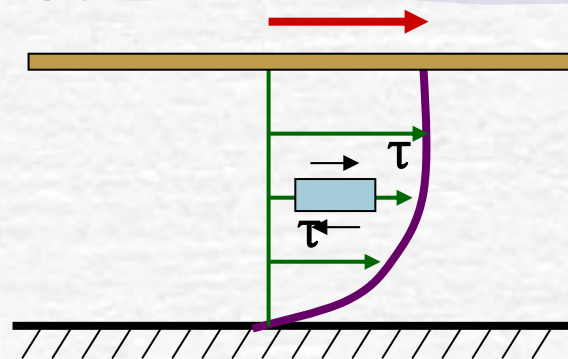
$$\bar{u}_x = \frac{v_*}{\kappa} \ln y + C$$







层流



紊流

可以看到雷诺应力所代表的动量对流，使紊流的流速分布变得更加均匀，必然导致壁面流速梯度和切应力的增加。

注意对数分布律不能用于粘性底层，所以紊流情况下，不能直接由流速分布，通过牛顿内摩擦定律得到壁面切应力，而是由对数分布律中的摩阻流速建立流速分布与壁面切应力之间的联系。

## § 7—4 圆管中的紊流流动

设圆管中紊流平均流动是“恒定”和均匀的，平均流速只有轴向分量  $\bar{u}_x$ ，我们来建立  $\bar{u}_x$  在断面上的分布，管壁起指向中心轴的法向为  $y$  轴， $\bar{u}_x$  上的横杠不再写出。考虑管壁的粗糙性。

列出运动学问题的函数关系式

$$u_x = u_x(y, k_s, \nu, \nu_*)$$

$k_s$

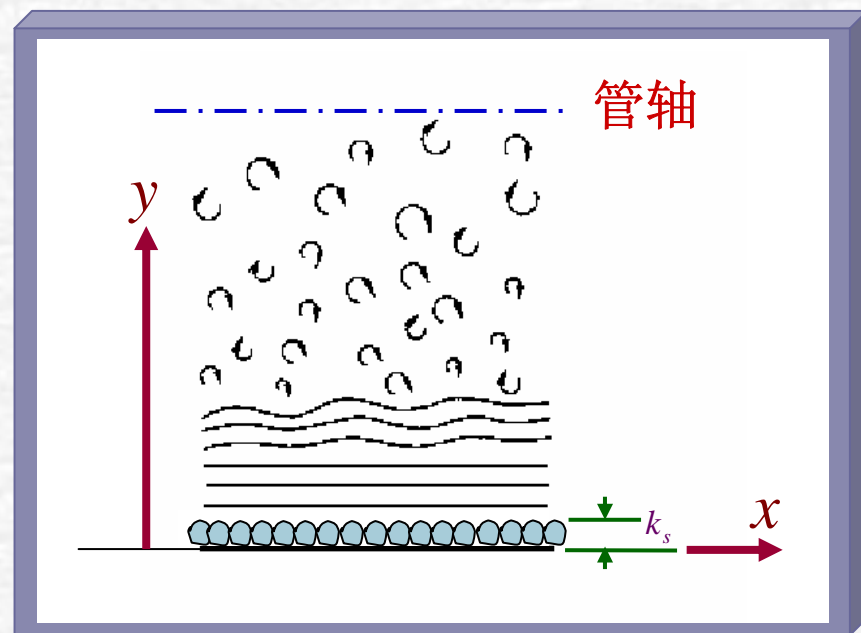
表示管壁人工砂粒粗糙高度

五个相关联的量可组成三个无量纲量

$$u^+ \equiv \frac{u_x}{\nu_*}$$

$$y^+ \equiv \frac{y\nu_*}{\nu}$$

$$\frac{y}{k_s}$$



无量纲关系式为

$$u^+ = u^+(y^+, \frac{y}{k_s})$$

$y^+$

反映壁面影响

$\frac{y}{k_s}$

反映粗糙影响

一. 光滑圆管紊流

$$u^+ = u^+(y^+)$$

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{d u_x}{d y} \right|_{y=0} = \rho v_*^2 \left. \frac{d u^+}{d y^+} \right|_{y^+=0}$$

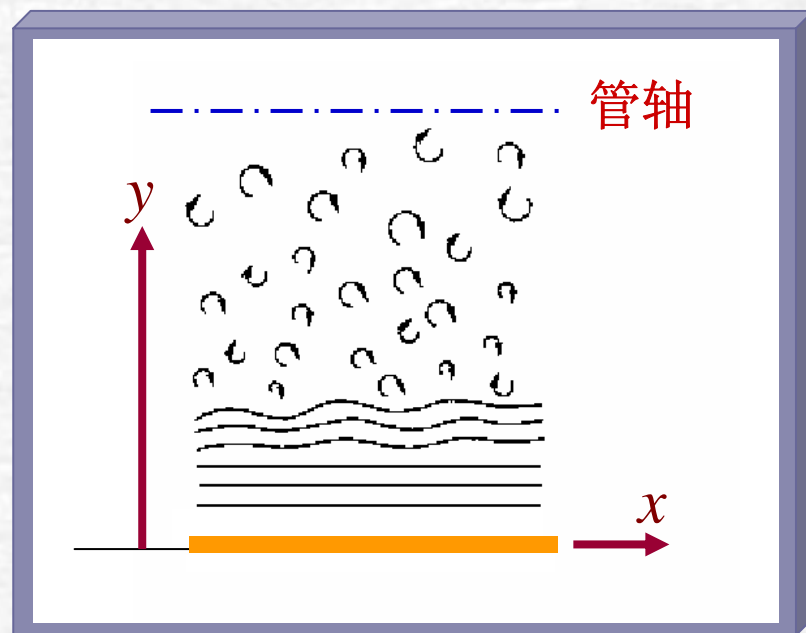
$$\left. \frac{d u^+}{d y^+} \right|_{y^+=0} = 1$$

在很薄的粘性底层中, 可认为

$$\frac{d u^+}{d y^+} \approx 1$$

粘性底层速度分布

$$u^+ = y^+$$



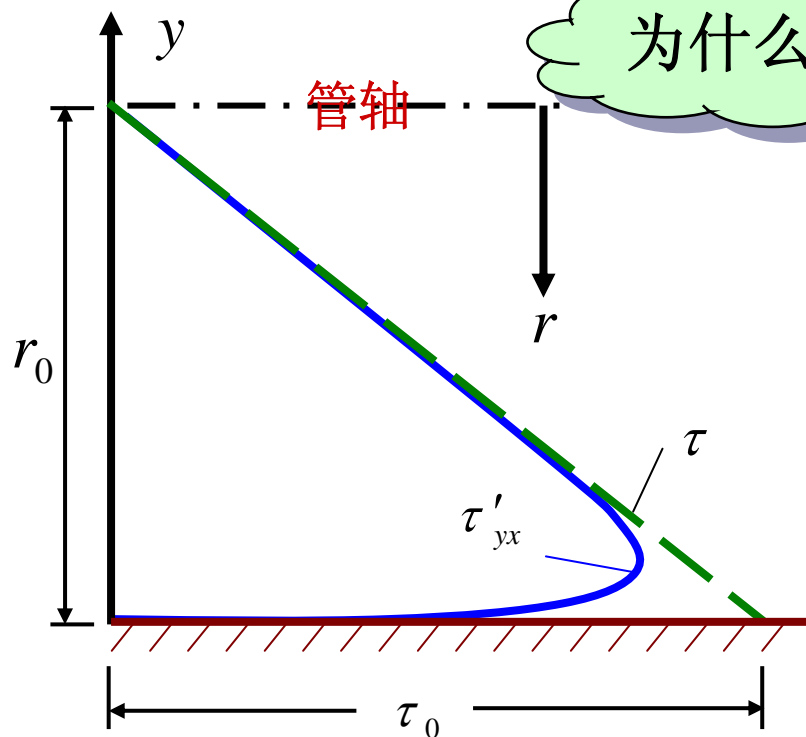
随着  $y^+$  的增加，越过一段过渡区，进入紊流区，有对数流速分布律

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$$

为什么？

圆管流动存在压差，切应力的分布情况与平面壁绕流不同。在推导层流流动的运动方程时我们已经得到切应力的与离管轴距离间的线性关系，这对于紊流平均流动依然是对的。

$$\tau = \frac{r}{2} \left| \frac{d p^*}{d x} \right|$$



紊流情况下，总切应力由粘性应力和雷诺应力两部分组成。  
管壁附近，离粘性底层以远一定距离后，雷诺应力占主导地位，

$$\tau'_{yx} \approx \tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0}\right)$$

圆管紊流流动的混合长度也应调整为

$$l = \kappa y \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}}$$

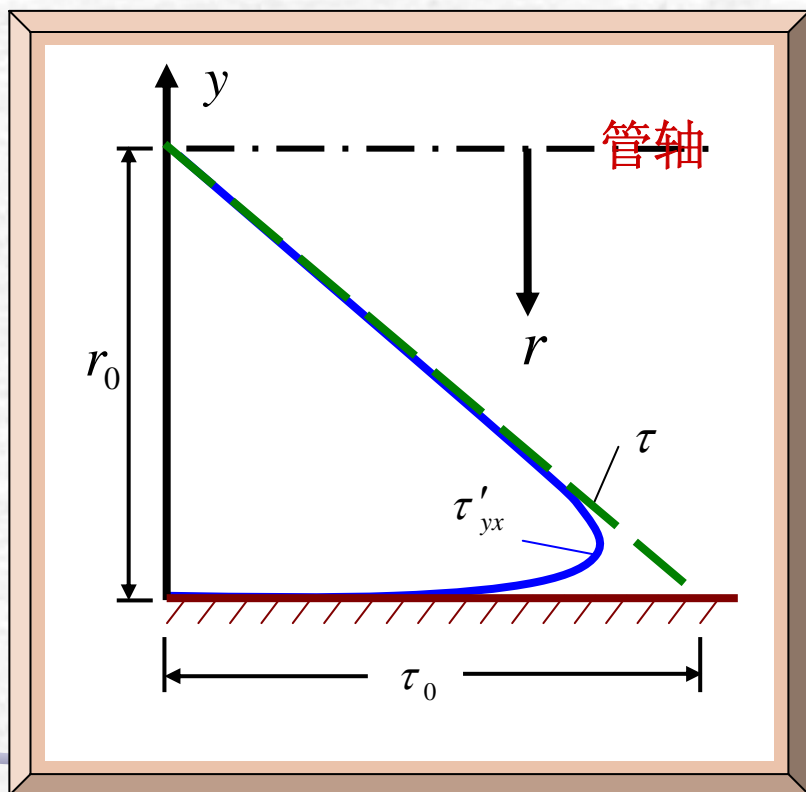
体现管轴处切应力趋于零的趋势， $r_0 \rightarrow \infty$

这样就仍有

即为平面壁情况

$$\frac{d\bar{u}_x}{dy} = \sqrt{\frac{\tau'_{yx}}{\rho l^2}} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{v_*}{\kappa y}$$

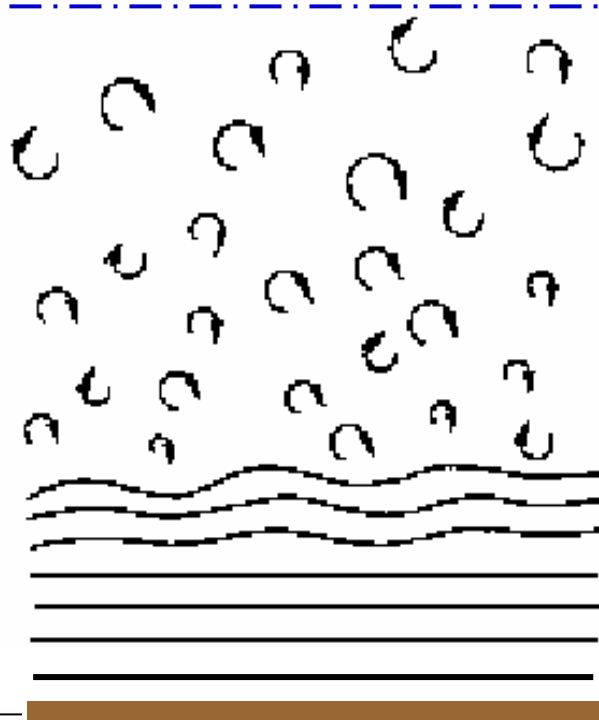
可见对数流速分布律仍成立。





管轴

$y$



紊流区

过渡区

粘性底层

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$$

$$u^+ = y^+$$

$x$

粘性底层速度分布

$$u^+ = y^+$$

对数流速分布律

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$$

两条曲线交点对应

$$y^+ = 11.6$$

相当于有量纲厚度

$$\delta_0 = 11.6 \frac{\nu}{v_*}$$

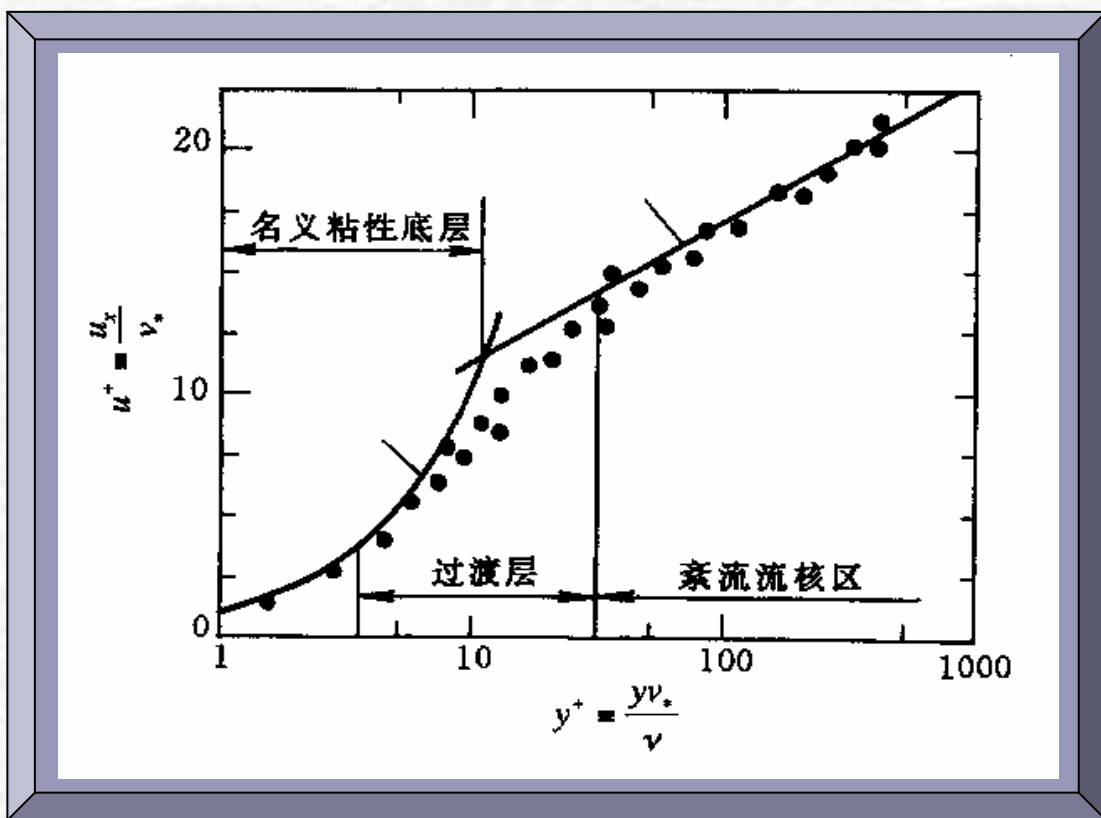
粘性底层的名义厚度

粘性底层的实际厚度通常认为是

$$\delta' = 5 \frac{\nu}{v_*}$$

$$5 \frac{\nu}{v_*} < y < 70 \frac{\nu}{v_*}$$

为紊流流速的过渡区

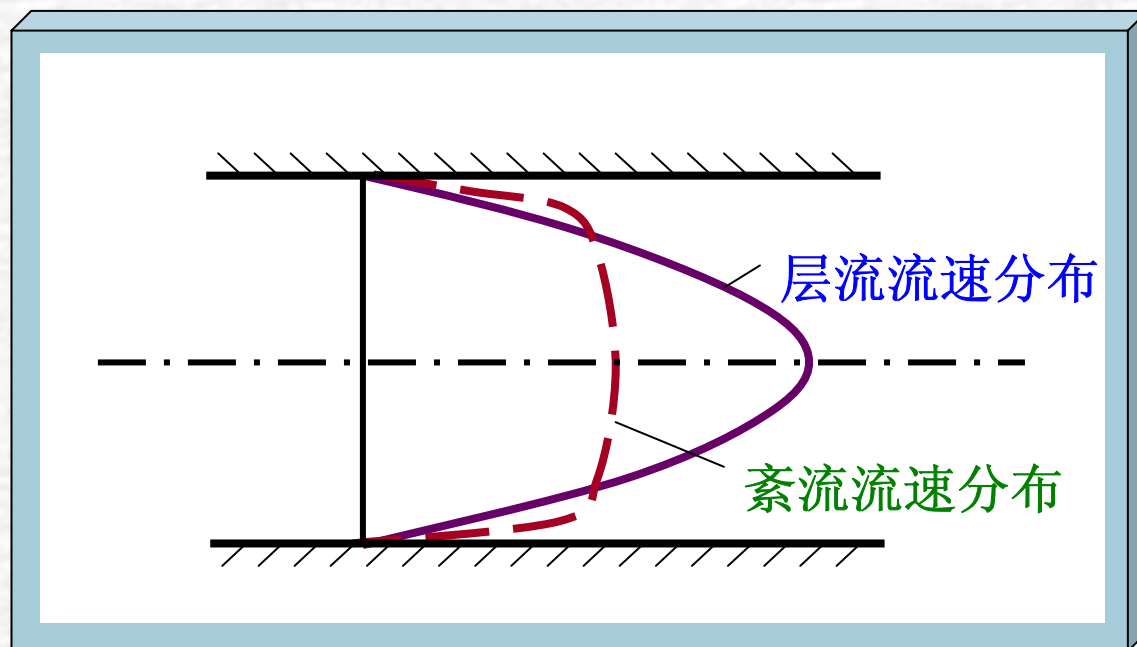


对相同流量下圆管层流和紊流流动的断面流速分布作一比较，可以看出紊流流速分布比较均匀，壁面流速梯度和切应力较大。雷诺数越大流速越均匀。

圆管紊流流速分布的另一种表达形式是  $n$  分之一定律

$$\frac{u_x}{u_{\max}} = \left( \frac{y}{r_0} \right)^{1/n}$$

$n$  取值随雷诺数增大而增大，常用的是七分之一定律，适用于雷诺数为  $10^5$



## 二. 粗糙圆管紊流

粗糙雷诺数

$$R_{e*} \equiv \frac{k_s v_*}{\nu}$$

$$R_{e*} < 5 \rightarrow k_s < \delta'$$

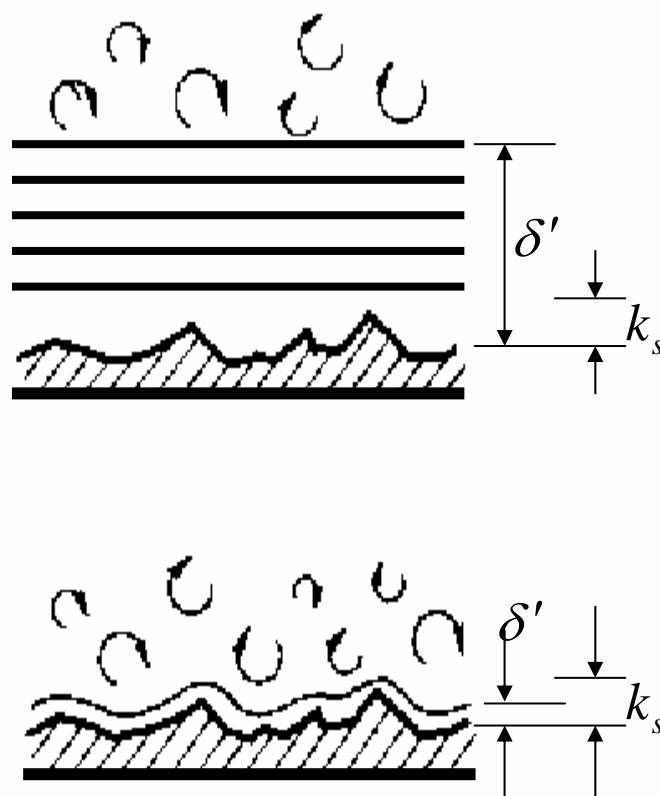
粗糙高度小于粘性底层厚度，  
为水力光滑圆管流动

$$R_{e*} > 70$$

粗糙高度已进入流速分布的  
对数区，连续的粘性底层已经  
不存在，为水力粗糙圆管流  
动。

$$5 < R_{e*} < 70$$

水力光滑和粗糙圆管流动间的  
过渡区。



水力光滑和粗糙的概念与其说是圆管的属性，不如说是圆管流动的属性。离开了流动谈圆管是光滑或粗糙是没有意义的。

粗糙圆管

$$u^+ = u^+ \left( \frac{y}{k_s} \right)$$

$$u^+ = 2.5 \ln \frac{y}{k_s} + 8.5$$

大量的试验结果表明，具体的流速分布为

在本章中，我们已经看到，层流、紊流转捩有一个临界雷诺数过渡区，紊流流动的断面流速分布在粘性底层与紊流区之间有一个流速过渡区，光滑与粗糙圆管流动之间有一个粗糙雷诺数过渡区。