

SPAR 平台系泊系统模态分析

唐友刚¹, 张若瑜¹, 庄 苗²

(1. 天津大学建筑工程学院, 天津 300072; 2. 清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘 要

考虑深水系统的拉伸和弯曲变形, 取正交坐标和切向量描述任意结点的 6 个广义位移, 计及缆变形的几何非线性和水动力影响, 基于细长杆理论推导缆索的单元刚度矩阵, 得到 12×12 的非线性单元刚度矩阵, 实现了单元与有限元软件的调用对接。针对水深 318m 的 Spar 平台, 四根缆定位, 计算了前 12 阶固有频率和模态。计算结果表明, 上述单元刚度矩阵能够反映深海系泊缆的力学特性, 得到的频率和模态特性基本合理。

关 键 词: Spar 平台; 细长杆理论; 几何非线性; 系泊系统; 固有频率; 模态

1 引言

SPAR 平台的重要组成部分是系泊系统。系泊系统模型主要有三种分析: 悬链线模型、集中质量模型和有限元模型。余龙、谭家华根据深水多成分锚泊线悬链线方程, 提出了多成分锚泊线的优化模型^[1]。由于悬链线模型是准静态模型, 在深海系泊中悬链线模型不再适用^[2]。集中质量法考虑惯性力、拉伸刚度、几何刚度和弹性刚度等物理参数, 可用于计算动张力^[3]。刘应中等用准定常时间域方法分析海上系泊系统的运动, 采用推广的三维集中质量法求得锚链的动力特性^[4]。唐友刚、易丛等考虑海底地形的变化、系缆的拉伸及海流力等因素, 采用集中质量法得到系缆方程组, 建立系缆形状和张力的计算方法^[5]。GARRETT 在经典细长杆理论上提出了三维弹性杆有限元模型^[6]。肖越用三结点索单元模拟系缆, 并通过迭代法逐步确定缆索的形状和流体作用力^[2]。KIM 用等参曲线单元计算几何非线性有限元方程, 求出单元切线刚度矩阵和质量矩阵^[7]。目前通用有限元软件, 缺乏描述深海系缆动力特性的单元刚度矩阵, 不能直接用于计算深海系泊缆动力响应^[8]。

本文基于 RAN 单元模型^[9], 考虑深海系泊索单元的几何非线性, 建立三维非线性索单元刚度矩阵, 并且实现与通用有限元软件对本文单元的调用。该方法基本上适用于深海系泊系统的动力响应计算。

2 细长杆模型的基本理论

选择图 1 所示细长杆坐标系。图 1 中, $r(s, t)$ 表示杆的中心线, s 为弧长, t 为时间。曲线上任意点的单位切向量为 r' , 单位主法向量为 r'' , 单位副法向量为 $r' \times r''$ 。

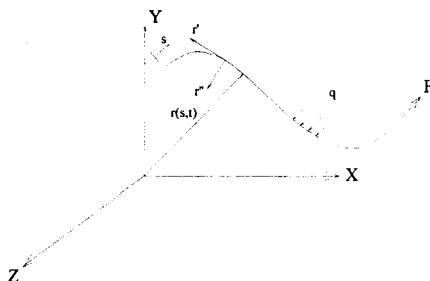


图 1 细长杆模型坐标系

模型单位弧长分段的力和弯矩的平衡方程可表述为

$$q + F' = \rho \ddot{r} \quad (1)$$

$$M' + r' \times F + m = 0 \quad (2)$$

式中 q 为单位长度上的外力, F 为轴线上合力, M 为轴线上的合弯矩, ρ 为单位长度质量, m 为单位长度上施加的弯矩, 向量 r 上方的点“.”表示对时间求导, $'$ 表示对弧长 s 求导。

对于等主刚度柔性杆, 弯曲刚度沿副法线方向并且与曲率成正比, 可表示为

$$M = r' \times EI r'' + H r' \quad (3)$$

式中 H 为扭矩, EI 为缆的弯曲刚度。将式 (3) 代入式 (2), 得

$$r' \times \left[(EI r'')' + F \right] + H r' + H r'' + m = 0 \quad (4)$$

忽略扭矩和弯矩, 得

$$r' \times \left[(EI r'')' + F \right] = 0 \quad (5)$$

引入函数 $\lambda(s, t)$, F 则写为

$$F = -(EI r'')' + \lambda r' \quad (6)$$

得到

$$\lambda = T - EI \kappa^2 \quad (7)$$

式中 κ 为缆索曲率, T 为缆索张力。将式 (5) 代入式 (1) 得到

$$-(EI r'')'' + (\lambda r')' + q = \rho \ddot{r} \quad (8)$$

对于不可伸长缆, r 必须满足以下条件:

$$r' \cdot r' = 1 \quad (9)$$

如果缆索为线性小量伸长, 则伸长条件变为

$$\frac{1}{2}(r' \cdot r' - 1) = \frac{T}{AE} \approx \frac{\lambda}{AE} \quad (10)$$

式中 λ 又称为拉格朗日乘子。本文中将缆索定义为可伸长。

3 深海系泊缆的非线性单元刚度矩阵

水中杆件单位长度的受力 q 为

$$q = w + F^s + F^d \quad (11)$$

式中, w 为空气中缆单位长度的质量, F^s 为单位长度静水压力, F^d 为单位长度水动力, 由莫里森方程求得。因此, 水动力和静水压力可以进一步写为

$$F^s = B - (Pr')' \quad (12)$$

$$\begin{aligned} F^d &= -\rho C_A \ddot{r}^n + C_M \dot{V}^n + C_D |V^n - \dot{r}^n| (V^n - \dot{r}^n) \\ &= -\rho C_A \ddot{r}^n + \bar{F}^d \end{aligned} \quad (13)$$

式中 B 为单位长度缆索受到的浮力, C_M 为惯性系数, C_A 为附加质量系数, C_D 为拖曳力系数, P 为缆索上结点 r 处的静水压, V^n 和 \dot{V}^n 为流体相对于缆索的速度和加速度, \ddot{r}^n 和 \dot{r}^n 分别为杆的加速度和速度垂直于中心线的分量, 写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{r}^n &= \dot{r} - (\dot{r} \cdot r') \cdot r' \\ \ddot{r}^n &= \ddot{r} - (\ddot{r} \cdot r') \cdot r' \end{aligned} \quad (14)$$

综合考虑各种受力, 得到自重、静水压力和水动力联合作用下缆索的方程为

$$-\rho \ddot{r} - C_A \rho_w r'' - (EI r'')'' + (\tilde{\lambda} r')' + \bar{w} + \bar{F}^d = 0 \quad (15)$$

式中 $\tilde{\lambda} \approx T + P$ $\bar{w} = w + B$, \bar{w} 为水中缆单位长度的质量。

将缆索划分为长度为 L 的单元, 每个单元的控制方程写为以下形式:

$$\int_0^L \delta r_i \left\{ -\rho \ddot{r}_i - \rho_w C_A \ddot{r}_i'' - (EI r_i'')'' + (\tilde{\lambda} r_i')' + \tilde{w}_i + \bar{F}_i^d \right\} ds = 0 \quad (16)$$

$$\int_0^L \left\{ \frac{1}{2} (r_i' \cdot r_i' - 1) - \frac{\tilde{\lambda}}{AE} \right\} \delta \tilde{\lambda} ds = 0 \quad (17)$$

引入单元插值函数, 将变量 $r_i(s, t)$ 和 $\lambda_m(s, t)$ 表示为

$$r_i(s, t) = \sum_{k=1}^4 A_k(s) U_{ik}(t) \quad (18)$$

$$\bar{\lambda}(s, t) = \sum_{m=1}^3 P_m(s) \bar{\lambda}_m(t) \quad (19)$$

式中插值函数 A_k 和 P_m 分别为二次或者三次多项式的形式。

将插值函数代入式 (16) 和式 (17), 得到

$$\begin{aligned} & \int_0^L \{ \rho A_i A_k + \rho_w C_A A_i A_k - \rho_w C_A A_i A_k A_s' A_s' U_{is} U_{it} \} ds \ddot{U}_{jk} + \int_0^L \{ E I A_i A_k'' \} ds U_{jk} + \int_0^L \{ P_n A_i A_k' U_{jk} \} ds \bar{\lambda}_n \\ &= \int_0^L \{ A_i (\bar{w}_i + \bar{F}_i^d) \} ds + (EI r_i'') \delta \left(\frac{dr}{ds} \right) \Big|_0^L + \left[\lambda r' - (B r_i'') \right] \delta r \Big|_0^L \end{aligned} \quad (20)$$

$$\int_0^L \frac{1}{2} P_m r_i' A_k' ds U_{jk} + \int_0^L -\frac{1}{AE} P_m P_n ds \bar{\lambda}_n = \int_0^L \frac{1}{2} P_m ds \quad (21)$$

将式 (20) 和式 (21) 式分别写成二阶微分方程和代数方程形式:

$$(M_{ijk} + M_{ijkl}^a) \ddot{U}_{jk} - K_{ijk}^{11} U_{jk} - K_{ilm}^{12} \bar{\lambda}_n = F_{il} + F_{il}^T \quad (22)$$

$$K_{mjk}^{21} U_{jk} + K_{mn}^{22} \bar{\lambda}_n = F_m^l \quad (23)$$

式中

$$\begin{aligned}
 M_{ijk} &= \int_0^L \rho A_l A_k \delta_{ij} ds \\
 M_{ijk}^a &= \int_0^L \left\{ \rho_w C_A A_l A_k \delta_{ij} - \rho_w C_A A_l A_k A'_s A'_l U_{js} U_{il} \right\} ds
 \end{aligned} \quad (24)$$

由式(24)形成缆单元12×12质量矩阵。缆单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned}
 K_{ijk}^{11} &= \int_0^L E I A_l'' A_k'' \delta_{ij} ds \\
 K_{iln}^{12} &= \int_0^L P_n r'_i A'_l ds \\
 K_{mjk}^{21} &= \int_0^L \frac{1}{2} P_m r'_j A'_k ds \\
 K_{mn}^{22} &= \int_0^L -\frac{1}{AE} P_m P_n ds
 \end{aligned} \quad (25)$$

缆单元的动力平衡方程为

$$(M_{ijk} + M_{ijk}^a) \ddot{U}_{jk} - K_{ijk}^{11} U_{jk} - K_{iln}^{12} (K_{mn}^{22-1} \cdot F_m^l - K_{mn}^{22-1} \cdot K_{mjk}^{21} U_{jk}) = 0 \quad (26)$$

按照有限元方法形成系泊系统整体刚度矩阵和质量矩阵,可求解固有频率和振型。

4 深海系泊系统算例

采用文献[10]SPAR平台系泊系统为例进行计算。平台有四根系缆对称布置成90°,如图2所示。平台的主要技术参数为:水深318m,主体直径40.54m,高度216.4m,系缆上端点与海底距离211.4m,缆在水中单位长度质量961.2kg/m,缆的弹性刚度 $EA=0.15 \times 10^{10}$ N,缆的预张力 5.11×10^6 N,缆的等效直径0.4153m。

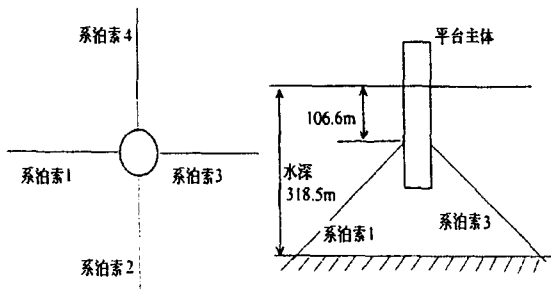


图2 SPAR平台模型图

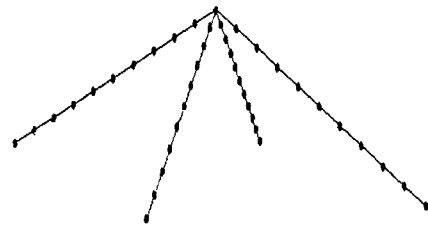


图3 深海系缆有限元模型图

将每根缆离散为10段,上端点处四根缆连接在一起,底端简支固定,建立的系泊系统有限元模型如图3所示。

采用本文单元刚度矩阵计算,得到系泊系统的前12阶固有频率和周期。这里给出前6阶模态的计算结果。表2为固有频率,图4~图9为前6阶振型,图中“.”为结点位置。

表 2 系泊系统固有频率及固有周期

振动模态	固有频率/ rad s^{-1}	固有周期/s
1	0.19089	32.89
2	0.19089	32.89
3	0.19089	32.89
4	0.38647	16.26
5	0.38647	16.26
6	0.38647	16.26

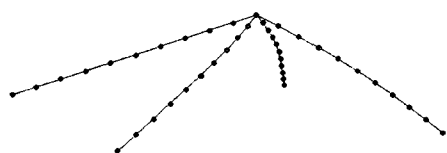


图 4 一阶振型

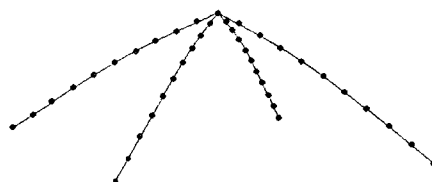


图 5 二阶振型



图 6 三阶振型



图 7 四阶振型



图 8 五阶振型



图 9 六阶振型

由振型图可以看出,一阶振型上端点(即平台主体)振动方向为横向振动,二阶为垂向振动,三阶同时有垂向移动和横向移动。

5 结论

(1) 本文采用细长杆理论建立刚度矩阵,编写本文单元程序,通过有限元软件二次开发接口,实现有限元软件对本文单元的调用,计算结果稳定,给出的计算结果合理,符合深海系泊缆的力学特性。

(2) 通过简单模型计算,将本文单元与梁单元固有频率进行比较,多数振型的固有频率基本一致,由于本文单元刚度矩阵为等主刚度矩阵,因此存在每三阶模态固有频率相同的情况,导致部分模态固有频率存在差异。

(3) 随着模态阶数提高,梁单元弯曲变形不断增加,单元的弯曲刚度与轴向刚度耦合,因此高阶振型弯曲刚度的影响不可忽略。而缆索属于柔性构件,其弯曲刚度虽然存在却是小量,不能用梁单元直接模拟。本文刚度矩阵的建立综合考虑缆的拉伸刚度、弯曲刚度及二者之间的耦合效应,显著改善了高阶振型的计算精度。

参考文献:

- [1] 余龙, 谭家华, 深水多成分悬链线锚泊系统优化设计及应用研究[J], 华东船舶工业学院学报, 2004, 18(5): 8~13.
- [2] 肖越, 系泊系统时域非线性计算分析[D]. 大连: 大连理工大学, 2006.
- [3] HUANG S. Dynamic analysis of three-dimensional marine cables[J]. Ocean Engineering, 1994, 21(6): 587-605
- [4] 刘应中, 黄庆玉. 系泊系统动力分析的时域方法[J], 上海交通大学学报, 1997, 31(11): 7-12.
- [5] 唐友刚, 易丛, 张素侠. 深海平台系缆形状和张力分析[J], 海洋工程, 2007, 25(2): 9-14.
- [6] GARRETT D L. Dynamic analysis of slender rods [A]. In Proceedings of the 1st International OMAE Conference, Dallas, 1982, 127-132
- [7] KIM N II, JEON S S. KIM M.Y. Nonlinear finite element analysis of ocean cables [J]. China Ocean Engineering, 2004, 18(4): 537-550.
- [8] 庄茁, 张帆, 岑松, 等. ABAQUS 非线性有限元分析与实例[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [9] RAN Z. Coupled Dynamic Analysis of Floating Structures in Waves and Currents [D]. Texas A&M University, 2000.
- [10] CHEN, X.H. Studies on Dynamic Interaction Between Deep-Water Floating Structures and their Mooring/Tendon Systems[D]. Texas A&M University, 2002.

Modal Analysis of Mooring System of Spar Platform

TANG You-gang¹, ZHANG Ruo-yu¹, ZHUANG Zhuo²

(1. School of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract

The 6 generalized displacements of the nodes are described by rectangular coordinate and their tangent vector, as well as considering the extension and bending deformation of cable in deep sea. The 12×12 nonlinear stiffness matrix is obtained based on the rod theory considering the geometric nonlinearity and the effect of water dynamic and the finite element can be called by general finite element software. The spar platform with 4 mooring cables in 318m depth is analyzed, and the first 12 modes and natural frequency of the mooring system are calculated. The result shows that the mechanical properties of mooring cable in deep sea can be reflected with user defined element, and the obtained frequency and modal characteristic are basic reasonable.

Key words: Spar platform; rod theory; geometric nonlinearity; mooring system; natural frequency; modes

作者简介

唐友刚 男 1952 年生, 博士, 教授, 博士生导师。主要从事船舶与海洋工程动力学及深海结构设计方面的研究工作。

张若瑜 女 1981 年生, 博士研究生。主要从事船舶与海洋工程结构动力学方面的研究工作。

庄茁 男 1952 年生, 博士, 教授, 博士生导师。主要从事固体力学方面的研究工作。