

# 平板表面裂纹开口位移与其深度关系的确定

田志刚<sup>1</sup>, 陈景杰<sup>1</sup>, 黄 一<sup>1</sup>, 藤本由纪夫<sup>2</sup>

(1 大连理工大学船舶工程系, 辽宁 大连 116024; 2 日本广岛大学工学部 VBL 实验室, 广岛 739-0046)

**摘要:** 无限大三维弹性体内超奇异积分方程的解析解表明, 位移间断与裂纹深度具有简单的比例系数关系。文章利用有限元法, 对带有表面半椭圆型裂纹的平板结构进行计算, 得到表面裂纹开口位移和名义应变的比值  $\Delta u/\varepsilon$ , 与表面裂纹深度  $D$ , 之间同样具有简单的比例系数关系。该比例系数相关于边界条件。据此, 文中提出一种裂纹深度估算的方法, 并给出实验验证。

**关键词:** 位移间断; 开口位移; 裂纹深度; 名义应变; 有限元法

**中图分类号:** U661.72

**文献标识码:** A

## Determination of the relationship between the opening displacement of a surface crack and its depth in a plate

TIAN Zhi-gang<sup>1</sup>, CHEN Jing-jie<sup>1</sup>, HUANG Yi<sup>1</sup>, Y FUJIMOTO<sup>2</sup>

(1 Dept of Naval Arch and Marine Eng, Dalian Univ of Tech, Dalian 116024, China;

2 Venture Business Lab, Faculty of Engineering, Hiroshima University, 739-0046, Japan)

**Abstract:** The analytical solution to the super singularity integral function for 3-D elastic body shows that there is a simple proportional relationship between the displacement difference and the crack depth. FE calculations are carried out on a plate with a surface crack, and calculation results illustrate that a same simple proportional relationship exists between the ratio of the crack mouth opening displacement (CMOD) to the nominal strain,  $\Delta u/\varepsilon$ , and the crack depth,  $D$ . Boundary conditions have great influence on the proportional coefficient. A method to evaluate crack depth is proposed based on the relationship, and it is validated by an experiment.

**Key words:** displacement difference; CMOD; crack depth; nominal strain; FE method

## 1 引言

裂纹几何尺寸是结构的抗疲劳设计、疲劳断裂分析、断裂判据和疲劳断裂控制中非常重要的参数。在作业环境下, 迅速准确地确定结构中疲劳裂纹的几何尺寸具有重要意义。本文通过有限元计算, 确定了表面裂纹深度和裂纹开口位移与名义应变比值之间的简单比例系数关系, 据此提出一种裂纹深度估算方法, 并给出实验验证。

## 2 超奇异积分方程及其解析解

如图 1 所示, 三维无限大均质弹性体中任一受法向内压载荷作用的平片裂纹的位移间断求解问

收稿日期: 2007-08-08

作者简介: 田志刚(1981-), 男, 大连理工大学船舶工程系硕士生。

题可以划归为求解如下超奇异积分方程<sup>[1-4]</sup>:

$$\int_{S'} \frac{\Delta u(\xi_1, \xi_2)}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{8\pi(1-\nu^2)}{E} P_3(x, y) \quad x, y \in S \quad (1)$$

式中:  $\int_{S'}$  为强奇异积分算子, 应该按照发散积分的有限部积分<sup>[5]</sup>计算;  $S$  为平片裂纹区域;  $E$  为杨氏模量;  $\nu$  是泊松比;  $r$  定义为  $r^2 = |\xi - x| = (\xi_1 - x)^2 + (\xi_2 - y)^2$ ;  $P(x, y)$  为裂纹表面上的法向内压力分布;  $\Delta u(x, y)$  是待确定的裂纹面间法向位移间断。

陈梦成<sup>[6-8]</sup>利用平片裂纹在均布载荷的作用下位移具有平方根的特性, 获得了椭圆平片裂纹在法向均布载荷作用下其超奇异积分方程的精确解析解。

$$\Delta u(x, y) = \frac{4b(1-\nu^2)P}{E^*E(k)} \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2} \quad (2)$$

式中,  $E(k)$  为第二类完全椭圆积分,  $k^2 = 1 - (b/a)^2$ ;  $a$  为椭圆平片裂纹长半轴,  $b$  为短半轴。

在长轴方向(沿  $x$  轴), 裂纹位移间断为:

$$\Delta u(x, 0) = \frac{4b(1-\nu^2)P}{E^*E(k)} \sqrt{1 - (x/a)^2} \quad |x| \leq a \quad (3)$$

椭圆平片裂纹长轴至裂纹边缘在  $y$  向的距离, 后称裂纹深度:

$$D(x, 0) = b \sqrt{1 - (x/a)^2} \quad |x| \leq a \quad (4)$$

由(3)、(4)两式得到:

$$D(x, 0) = \eta \Delta u(x, 0) \quad |x| \leq a \quad (5)$$

式中  $\eta = \frac{E^*E(k)}{4(1-\nu^2)P}$ , 与弹性体材料、裂纹形状和作用载荷有关, 称比例系数。

(5)式提供了一种裂纹深度估算的思路: 利用实验方法测得裂纹的开口位移, 根据比例系数来确定裂纹深度。

### 3 平板结构中的表面裂纹开口位移和裂纹深度

超奇异积分方程(1)及其解(2)的应用是有局限性的。受边界条件的影响, 实际结构中表面裂纹的开口位移和裂纹深度的关系不能简单地由(5)式表达。为明确二者之间的关系, 对图2所示平板结构进行有限元计算。计算中考虑了不同的裂纹深度和裂纹宽度对结果的影响。

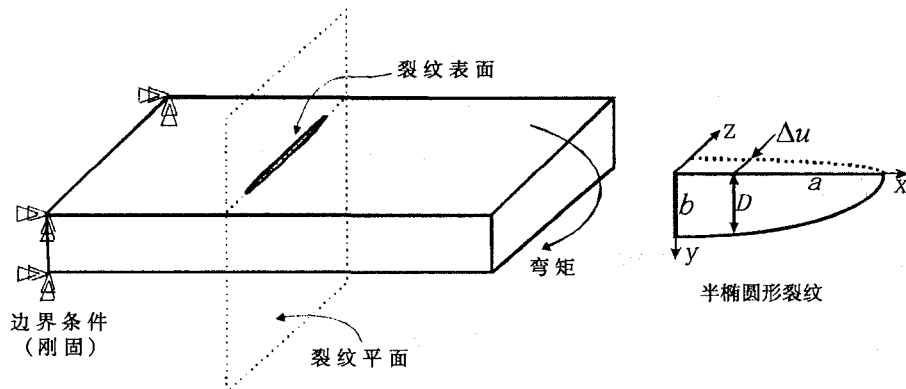


图2 平板及表面裂纹

Fig.2 A plate with a surface breaking crack

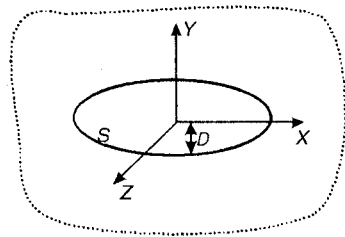


图1 无限大三维弹性体中平片裂纹

Fig.1 A crack in a 3-D infinite elastic body

(5)式表明载荷直接相关于比例系数,即比例系数受非裂纹因素影响较大。为体现比例系数与裂纹形状之间的关系,有必要将载荷因素以名义应变 $\varepsilon$ 的形式与开口位移 $\Delta u$ 一起考虑,即将 $\Delta u/\varepsilon$ 作为统一的参量,考察它与裂纹深度 $D$ 的关系。所谓名义应变 $\varepsilon$ 是指,在不考虑结构不连续性的情况下,平板结构在外载荷作用下裂纹处所产生的应变。注意,表面裂纹开口位移与名义应变应该是同一方向上的。

模型几何尺寸为:200×80×20(mm);杨氏模量 $E=2.1\times 10^5$ (MPa);泊松比 $\nu=0.3$ 。假定裂纹位于平板模型长度方向的中央部位。该模型在自由端受弯矩作用。在弹性范围内,载荷的大小对 $\Delta u/\varepsilon$ 不产生影响,而起影响作用的仅仅是载荷的作用形式。

### 3.1 表面裂纹深度的影响

图2所示模型中,确定裂纹长度为 $2a=40$ (mm)时,令裂纹深度分别为 $b=2, 6, 10, 14$ (mm)。

计算结果如图3所示。可以看出,沿裂纹长度方向,裂纹开口位移与名义应变的比值 $\Delta u/\varepsilon$ 和裂纹深度 $D$ 之间存在简单的比例系数关系。裂纹长度固定的情况下,该比例系数 $\eta$ 随着裂纹深度的增加而增加,但不从本质上改变比例关系。

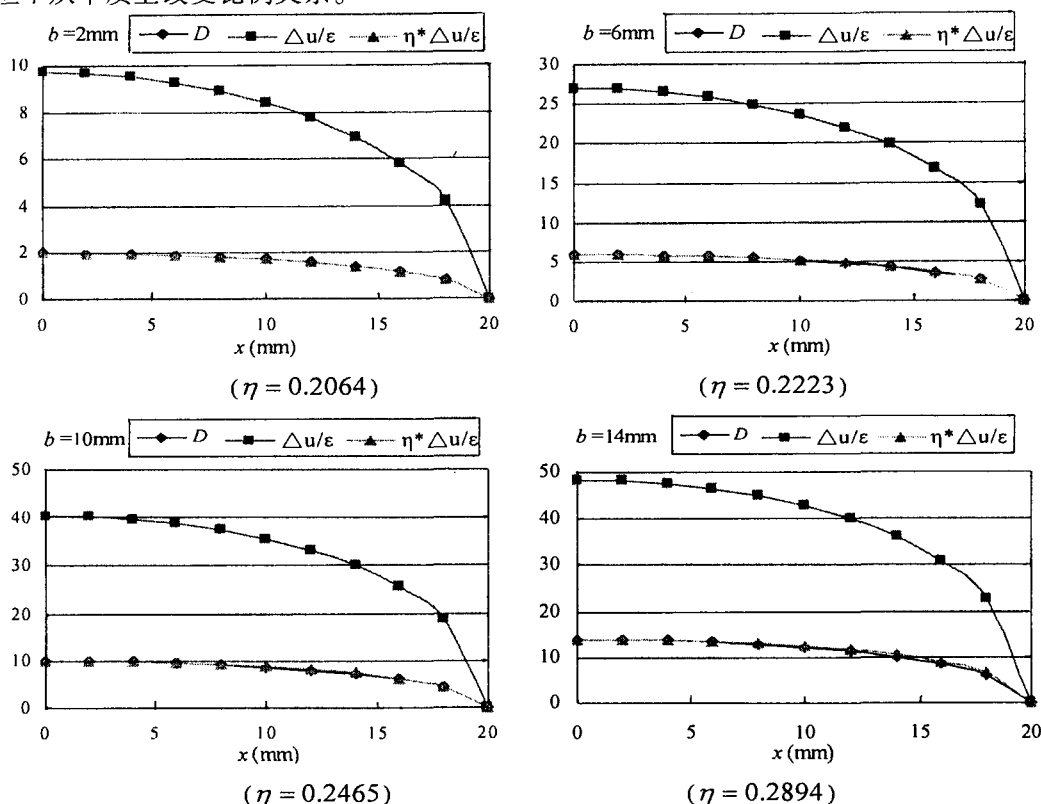


图3 表面裂纹开口位移与裂纹深度关系( $a=20$ mm)

Fig.3 The relationship between CMOD and the crack depth ( $a=20$ mm)

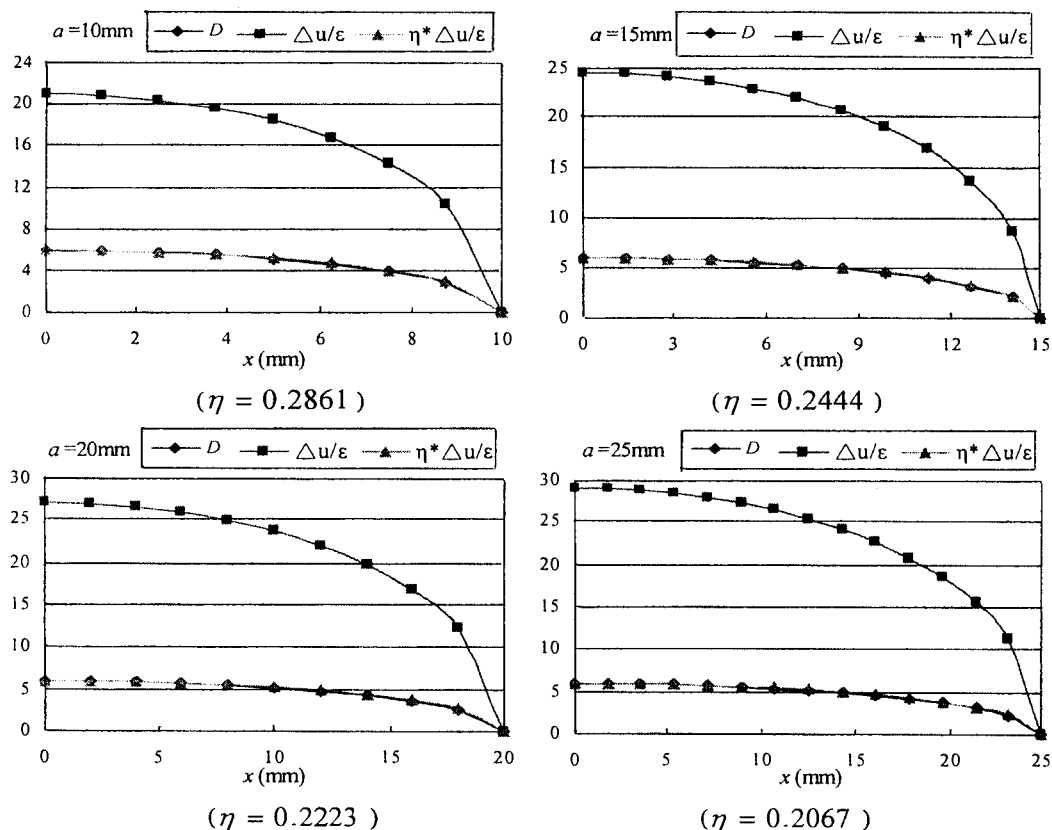
### 3.2 表面裂纹宽度的影响

确定裂纹深度 $b=6$ (mm)时,令裂纹长度 $2a=20, 30, 40, 50$ (mm)。

计算结果如图4所示。可以看出,沿裂纹长度方向,裂纹开口位移与名义应变的比值 $\Delta u/\varepsilon$ 和裂纹深度 $D$ 之间存在简单的比例系数关系。在裂纹深度固定的情况下,该比例系数 $\eta$ 随着裂纹宽度的增加而减小,但不从本质上改变比例关系。

综合3.1、3.2节知,随裂纹短长轴比 $b/a$ ,即裂纹深度与裂纹长度比的增大,比例系数 $\eta$ 增大。算例中,比例系数 $\eta$ 由表面裂纹长轴向中心处( $x=0$ )开口位移与名义应变比值 $\Delta u/\varepsilon$ ,和裂纹深度 $D$ 做商得到。该比例系数相关于裂纹长度、深度、平板宽度、平板厚度和载荷作用形式等。

$$D(x)=\eta\Delta u(x)/\varepsilon, |x|\leq a \quad (6)$$

图 4 表面裂纹开口位移与裂纹深度关系 ( $b=6\text{mm}$ )Fig.4 The relationship between CMOD and the crack depth ( $b=6\text{mm}$ )

## 4 应用比例关系估算裂纹深度

根据(6)式可以估算平板结构中表面裂纹的深度。首先,测得表面裂纹的开口位移和相应的名义应变;然后给定初始比例系数,获得初始裂纹深度,建立有限元模型;最后通过试算得到比例系数,确定裂纹深度。

算法如下:

- (1) 测得平板结构表面裂纹开口位移  $\Delta u$  与名义应变  $\varepsilon$ ;
- (2) 给定初始比例系数  $\eta_0$ ;
- (3) 据(6)式获得裂纹深度  $D$ ;
- (4) 建立有限元模型,求出裂纹开口位移  $\Delta u_0$ 与名义应变  $\varepsilon_0$ ;
- (5)  $\Delta u/\varepsilon$  与  $\Delta u_0/\varepsilon_0$ 比较;
- (6) 与给定误差限比较,若满足精度要求,停止计算,得到裂纹深度  $D$ ;
- (7) 若不符合要求,则更新比例系数  $\eta$ ,重复(3)、(4)、(5)、(6)。

平板结构表面裂纹开口位移与名义应变可以通过应变片、压电材料传感器等测得。根据第二部分的讨论,可以设定一个适当的区间,通过二分法确定合适的比例系数。

## 5 应用实例

试件材料为 SS400 软钢。试件为  $300 \times 60 \times 10(\text{mm})$ 带表面半椭圆型裂纹的平板。实验时平板一端

固定,另一端施加弯矩载荷,参考图5。裂纹距固定端140mm,裂纹平面法向为试件长度方向,裂纹长度为45mm,最大裂纹深度为5mm。

平板自由端受小弯矩扰动后,可由裂纹开口处的应变片A测得开口位移;由另一应变片B近似测得结构受载荷作用时相应的名义应变。两组电信号的比值等于载荷作用时开口位移与名义应变之比,如图6所示。

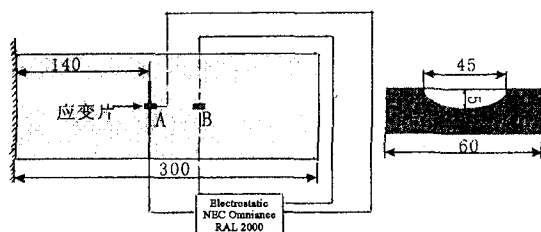


图5 试件及裂纹几何尺寸

Fig.5 A cracked specimen and its crack shape

设定初始比例系数  $\eta_1=0.1$ ,  $\eta_2=0.4$ , 用二分法经过8次试算后求得  $\eta=0.1802$ 。

据此得到实验结果与实际结果比较,如表1所示。实验值和实际值在裂纹中间部分误差不超过5%,且估算结果偏于安全。在裂纹边缘部分误差较大。

## 6 结 语

本文从无限大三维弹性体内平片裂纹的位移间断的解析解出发,得到位移间断与裂纹深度具有简单的正比关系。通过有限元数值计算确定了平板表面裂纹的开口位移与名义应变的比值和表面裂纹深度具有确定的比例系数关系。在其它边界条件确定情况下,该比例系数随着裂纹长度与裂纹深度比值的增大而增大。最后提出一种裂纹深度估算的方法,并给出实验验证。实验值和实际值在裂纹中间部分,即最大裂纹深度部分,有很好的 consistency,误差不超过5%,且估算结果偏于安全。在裂纹边缘部分误差较大。

## 参 考 文 献:

- [1] Bueckner H F. Fields singularities and related integral representation[J]. Mechanics of Fracture, 1973, 1: 239-314.
- [2] Ioakimidis N I. Upper bounds for the stress intensity factors along the boundaries of interacting coplanar cracks in three-dimensional plasticity[J]. Eng Fracture Mechanics, 1982, 16: 821-826.
- [3] 汤任基. 断裂力学中的两类奇异积分方程[J]. 上海交通大学学报, 1990, 24: 36-46.
- [4] 汤任基, 秦太验. 三维断裂力学的超奇异积分方程方法[J]. 力学学报, 1993, 25: 665-675.
- [5] Kutt H R. Numer Math[J]. 1975, 24: 201-210.
- [6] 陈梦成. 两相材料界面附近(含界面)三维断裂力学问题的超奇异积分方程方法[D]. 上海: 上海交通大学博士学位论文, 1997.
- [7] 陈梦成. 法向均布载荷作用下椭圆平片裂纹超奇异积分方程的封闭解[J]. 华东交通大学学报, 1998, 15(3): 10-12.
- [8] 陈梦成, 陈振建, 汤任基, 幸筱流. 椭圆平片裂纹前沿应力强度因子解析解的超奇异积分方程方法[J]. 固体力学学报, 2000, 4: 331-334.

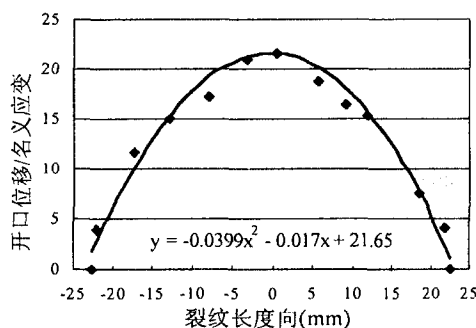


图6 测得开口位移与名义应变比值

Fig.6 The measured ratio of CMOD to nominal strain

表1 真实深度与实验结果比较

Tab.1 Comparison between the real and the evaluated depth

长度向位置 (mm)	真实深度 (mm)	实验结果 (mm)	误差 (%)
-14.17	3.08	3.49	13.31
-7.44	4.48	4.62	3.13
-0.58	5.00	5.25	5.00
6.67	4.58	4.8	4.80
13.47	3.26	3.51	7.67