

## 一种基于方向概率的潜艇结构可靠性计算方法

吴亚舸<sup>1</sup>, 吴剑国<sup>2</sup>

(1 同济大学土木工程学院建筑工程系, 上海 200000; 2 华东船舶工业学院, 江苏 镇江 212003)

**摘要:** 潜艇结构可靠性分析属于多个相关模式串联的系统可靠性分析问题。本文通过随机空间的映射变换, 将其多个失效模式的失效面统一变换到随机独立的标准正态空间 (Gauss 空间) 内, 以利用该空间球坐标沿其径向的  $\chi^2$  分布特性计算总体失效域上的失效概率。由于无须进行模式间相关性的近似分析, 因而提高了系统失效概率的计算精度。潜艇两种耐压结构的可靠性分析算例表明: 该方法实用性强, 操作性好, 精度较高, 对于有高度非线性失效面方程的可靠性计算问题有很强的适应性。

**关键词:** 结构可靠性; 失效模式; 串联结构系统; 并联结构系统; 圆柱壳; 液舱

**中图分类号:** U661.4      **文献标识码:** A

## 1 引言

对于潜艇结构这样的多模式串联结构系统的可靠性计算问题, 传统的处理方法是先以一阶二次矩 (FOSM) 法或数值模拟法计算单个模式的失效概率, 再在考虑各模式间相关性的基础上按串联系统计算系统失效概率 (如各种区间估计法, 点估计法等)。但这样的近似计算未必能反映模式间真实的相关性, 同时计算也较为繁琐。JC 法 (一种常用的 FOSM 法) 的变量当量正态化过程依赖于设计点, 而不同的失效模式有不同的设计点, 因此 JC 法不能计算多个失效模式串联的系统失效概率。蒙特卡罗 (Monte-Carlo) 法理论上可以通过判断抽样点是否落入总体失效域而计算串联结构系统的系统失效概率, 但效率甚低。因此, 若能设法将原随机变量空间变换到 Gauss 空间 (即随机独立的标准正态空间), 而变换过程与失效模式无关, 则可将各失效模式的失效面纳入同一随机空间中计算总体失效域, 并能利用 Gauss 空间球坐标沿其径向的  $\chi^2$  分布特性计算潜艇结构的系统可靠性。

## 2 计算结构系统失效概率的方向概率法

在 Gauss 空间内, 因  $Y_i \sim N(0, 1)$ , 所以  $R^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$  服从自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布。于是, 若将以原点为球心的单位球面等分为  $N$  份, 并以此等分 Gauss 空间, 则串联结构系统的系统失效概率可按式计算<sup>[1]</sup>:

$$P_f = \sum_{i=1}^N [1 - \Gamma_n(\min(R_j)^2)] / N \quad (1)$$

式中  $\Gamma_n$  表示自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布函数。上式的含义是: 若自原点  $O$  出发沿某  $\vec{a}_i$  方向的射线与  $m$  个失效面  $Z_1 = G_1(Y), \dots, Z_m = G_m(Y)$  分别相交, 所截得的矢径长为  $R_j, j = 1, 2, \dots, m$ , 则在该方向上的失效域与安全域将以  $\min(R_j)$  为界, 且该方向上的失效概率为:  $[1 - \Gamma_n(\min(R_j)^2)] / N$ 。上述各方向的失效概率之和即为结构的系统失效概率。显然,  $N$  越大, 空间分割得越密,  $P_f$  的计算精度越高。

类似地, 并联结构系统的系统失效概率为:

收稿日期: 2001-12-24

作者简介: 吴亚舸 (1976-), 男, 同济大学土木工程学院博士生。

$$P_f = \sum_{i=1}^N [1 - \Gamma_n(\max(R_i)^2)] / N \quad (2)$$

上述系统失效概率的计算方法是基于 Gauss 空间的。若推广到一般非正态分布相关随机变量的可靠性计算问题,则需作相应的随机空间变换,见下节讨论。

## 2.1 随机空间的映射变换<sup>[2]</sup>

设  $n$  个独立的随机变量为  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , 其概率分布函数为  $F_i(x_i)$ , 作如下变换:

$$Y_i = \Phi^{-1}[F_i(X_i)]; \quad \text{逆变换: } X_i = F_i^{-1}[\Phi(Y_i)] \quad (3)$$

式中  $\Phi^{-1}(\cdot)$  为标准正态分布函数  $\Phi(\cdot)$  的反函数,  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  为标准正态随机变量, 将上式代入失效面函数有:

$$\begin{aligned} Z &= G_X(X_1, X_2, \dots, X_n) = G_X(F_1^{-1}[\Phi(Y_1)], F_2^{-1}[\Phi(Y_2)], \dots, F_n^{-1}[\Phi(Y_n)]) \\ &= G_Y(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \end{aligned} \quad (4)$$

这时结构系统的失效概率表示为:

$$\begin{aligned} P_f &= P(Z_1(X) < 0 \cup Z_2(X) < 0 \cdots \cup Z_m(X) < 0) \\ &= P(Z_1(Y) < 0 \cup Z_2(Y) < 0 \cdots \cup Z_m(Y) < 0) = \int_{\sum Z_i(Y) < 0} \varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) dY \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $m$  为失效模式的个数,  $\varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  为  $n$  维独立的标准正态概率密度函数。

对于相关随机变量的情况,可先对  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  作如下变换:

$$X' = A^T X \quad \text{逆变换: } X = AX' \quad (6)$$

上式中  $X'$  为变换后的独立随机变量,  $A$  为正交变换阵, 它是由变量  $X$  的协方差矩阵  $\bar{C}_X$  的特征值对应的特征向量组成, 即  $A$  满足下式:

$$A^T \bar{C}_X A = \bar{\lambda} = \bar{C}_{X'} \quad (7)$$

上式中  $\bar{C}_{X'}$  为  $X'$  的协方差矩阵, 该方阵非对角线上的元素为零, 对角线上的元素为  $\sigma_{X'_i}^2$ 。

## 2.2 $n$ 维单位球面的等分

对于二或三维空间, 可以很方便地在极坐标或球坐标中将单位圆周或球面等分为  $N$  份, 但对于  $n \geq 4$  的高维空间, 则很难将超球面等分为  $N$  份; 为此, 这里利用了电磁学原理<sup>[1]</sup>。设想将  $N$  个同性单位点电荷随机散布在球面上, 则电荷将在彼此斥力的作用下达到均匀分布, 这一过程实质上是最小势能原理的体现。具体实现过程如下:

(1) 随机产生  $N$  个向量  $Y_i$ , 将其标准化为:  $Y_i = Y_i / |Y_i|$ , 即在单位球面上散布点电荷 (见图 1);

(2) 计算球面电荷的总势能:  $U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{|Y_i - Y_j|}$ ;

(3) 计算球面上  $N$  个点电荷的斥力:  $F_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{|Y_i - Y_j|^3} (Y_i - Y_j)$ , 并计算其沿球面切向力  $F_{ti}$ ;

(4) 允许  $N$  个电荷沿其切向力  $F_{ti}$  发生微小位移  $\delta u_i = \delta u \cdot F_{ti} / \max(F_{ti})$ , 并计算位移后的总势能  $U_0$ 。若  $U$  有所减小, 则接受新的电荷分布, 返回 (3) 步; 若  $U$  增加, 则  $\delta u_i$  减半, 再次计算总势能  $U_0$ 。重复该步计算直到  $U$  有所减小为止后返回 (3) 步;

(5) 当两次计算的  $|U - U_0| < \epsilon$  ( $\epsilon$  为任意一指定精度), 则停止计算, 输出此时  $N$  个点电荷分布的坐标  $Y_i$  (见图 2)。

按上述算法可以生成任意  $n$  维球面上的  $N$  个均匀分布点。图 1, 2 给出了  $N = 200$  时三维半球面上的随机散布点和计算处理后的均匀分布点。当维数  $n$  升高时, 若要保证系统失效概率的计算精度达到

相同要求,则  $N$  要相应增大,运算量正比于  $O[(n \cdot N)^2]$ 。所幸的是:生成的  $n$  维球面均匀分布点仍可用于其它有相同维数随机空间的可靠性分析,无须重复计算。

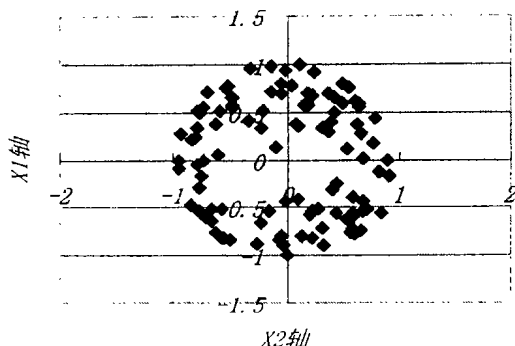


图1  $X_3$  正半轴半球面上的随机散布点

Fig.1 The random distributed spots on positive hemispherical surface in the direction of  $X_3$

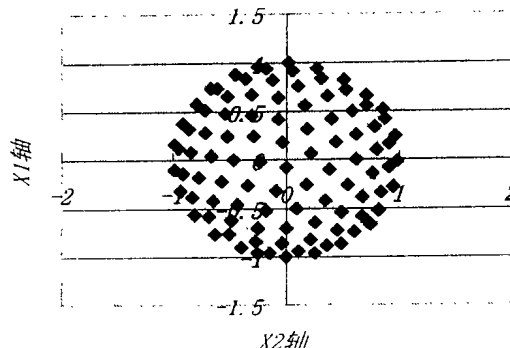


图2  $X_3$  正半轴半球面上的均匀分布点

Fig.2 The uniform distributed spots on positive hemispherical surface in the direction of  $X_3$

### 2.3 方向概率法计算串联结构系统失效概率的基本算法

根据上述方向概率求和法思想可以方便地程序化,实现电算。其基本算法如下:

(1) 确定结构的主要失效模式及其随机变量的维数  $n$ , 读取  $n$  维单位球面上  $N$  个均匀分布点的坐标,每个点的坐标分量即为该  $i$  分量上的方向余弦  $\cos \theta_i$ 。

(2) 若自球心到某一均布点的矢量为  $Y$ ,其分量为:  $Y_i = R \cos \theta_i, i = 1, 2, \dots, n$ ; 对  $Y$  实施(3)式的逆变换  $X'_i = F_i^{-1}[\Phi(Y_i)]$ ; 若原变量空间随机相关,则还须实施(6)式的逆变换  $X = AX'$ ,  $A$  为满足(7)式的正交变换阵。至此完成了 Gauss 空间内变量  $Y$  到原随机空间内变量  $X$  的映射变换。

(3) 将  $X$  代入  $m$  个极限状态方程(即失效面方程)  $Z_j = G_j(X)$  解出  $R_j$ , 若无解则表示该方向上的射线与失效面不相交,  $P_j = 0$ 。比较  $R_j (j = 1, \dots, m)$  的大小并计算  $P_j = 1 - \Gamma_n(\min(R_j)^2)$ , 最后由(1)式求出结构系统失效概率。

### 2.4 简单算例

(1) 如图3所示超静定桁架(该题出自文献[5]的算例4-3), 随机变量服从正态分布, 且相互独立, 其统计量为: ( $CV$  为变异系数)

各杆元拉压能力:  $\mu_{R1} = 137.2 \text{ kN}$ ,  $\mu_{R2} = 98.0 \text{ kN}$ ,  $\mu_{R3} = 196.0 \text{ kN}$ ,  $CV_{R_i} = 0.15 (i = 1, 2, 3)$ ;

载 荷:  $\mu_F = 29.4 \text{ kN}$ ,  $\mu_P = 127.4 \text{ kN}$ ,  $CV_F = 0.15$ ,

$CV_P = 0.3$ ;

考虑5种主要可能机构,其安全裕度为:

$$Z_1 = R_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R_3 - P$$

$$Z_2 = R_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R_3 - P - F$$

$$Z_3 = 2R_1 - P$$

$$Z_4 = \sqrt{2} \cdot R_3 - P$$

$$Z_5 = R_1 + R_2 - P + F$$

各失效模式及其系统失效概率的计算结果比较见表1。

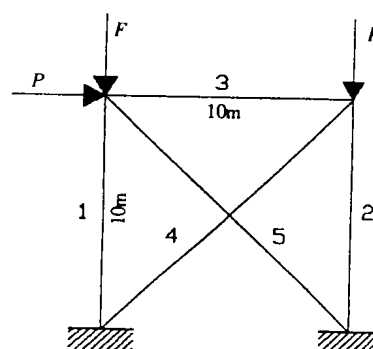


图3 某平面桁架结构简图

Fig.3 Some plain truss structure

表 1 该桁架结构的失效概率计算结果比较  
Tab.1 Comparison of failure probability of the truss

| 计算方法                          |       | 模式(1)                                 | 模式(2)                   | 模式(3)                   | 模式(4)                             | 模式(5)                   |
|-------------------------------|-------|---------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| 可靠性指标 $\beta$                 |       | 2.3777                                | 2.4620                  | 2.6171                  | 2.6522                            | 2.9799                  |
| JC法                           | 笔者计算  | $8.7111 \times 10^{-3}$               | $6.9079 \times 10^{-3}$ | $4.4338 \times 10^{-3}$ | $3.9982 \times 10^{-3}$           | $1.4417 \times 10^{-3}$ |
|                               | 文献[5] | $8.71 \times 10^{-3}$                 | $6.91 \times 10^{-3}$   | $4.43 \times 10^{-3}$   | $4.00 \times 10^{-3}$             | $1.44 \times 10^{-3}$   |
| 方向概率法                         |       | $8.7162 \times 10^{-3}$               | $6.9065 \times 10^{-3}$ | $4.4406 \times 10^{-3}$ | $4.0024 \times 10^{-3}$           | $1.4446 \times 10^{-3}$ |
| 本桁架结构的系统失效概率                  |       |                                       |                         |                         |                                   |                         |
| 计算方法比较                        |       | 系统失效概率估计下限                            |                         |                         | 系统失效概率估计上限                        |                         |
| 最大界限估计                        |       | $P_f^{(L)} = 8.71 \times 10^{-3}$     |                         |                         | $P_f^{(U)} = 2.55 \times 10^{-2}$ |                         |
| Ditlevson界限估计 <sup>[5]</sup>  |       | $P_f^{(L)} = 1.35 \times 10^{-2}$     |                         |                         | $P_f^{(U)} = 1.60 \times 10^{-2}$ |                         |
| 概率网络估算技术(PNET) <sup>[5]</sup> |       | 系统失效概率: $P_f = 1.314 \times 10^{-2}$  |                         |                         |                                   |                         |
| 方向概率法                         |       | 系统失效概率: $P_f = 1.5321 \times 10^{-2}$ |                         |                         |                                   |                         |

(2) 如图 4 所示单跨两层刚架(该题出自文献[5]的算例 4-7),各随机变量的统计参数如表 2(其中  $M_1$  为梁端塑性抵抗矩),考虑文献[5]所给出的 8 个主要失效机构(即 8 个失效模式),其安全裕度如下:

$$Z_1 = 4 \cdot M_2 - (l_2/2) \cdot F_2$$

$$Z_2 = 6 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 - 3 l_1 \cdot P - (l_2/2) \cdot F_2$$

$$Z_3 = 4 \cdot M_1 + 3 \cdot M_2 - 3 l_1 \cdot P - (l_2/2) \cdot F_2$$

$$Z_4 = 4 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 - (l_2/2) \cdot F_2$$

$$Z_5 = 4 \cdot M_1 - 3 l_1 \cdot P$$

$$Z_6 = 8 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 - 4 l_1 \cdot P - (l_2/2) \cdot F_2$$

$$Z_7 = 4 \cdot M_1 + 6 \cdot M_2 - 4 l_1 \cdot P - (l_1/2) \cdot F_1 - (l_2/2) \cdot F_2$$

$$Z_8 = 4 \cdot M_1 + 4 \cdot M_2 - 4 l_1 \cdot P - (l_2/2) \cdot F_2$$

考虑变量相互独立和相关两种情况:

(a) 随机变量统计独立时各失效模式及其系统失效概率的计算结果比较见表 3。

(b) 随机变量互为相关时各失效模式及其系统失效概率的计算结果比较见表 4。其中各变量的相关系数矩阵如下:

$$C_u = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.8 & 0.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.8 & 1.0 \end{pmatrix}$$

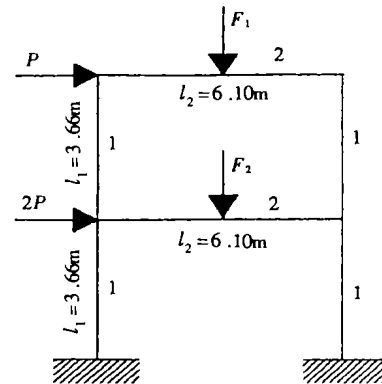


图 4 某平面框架结构简图

Fig.4 Some plain frame structure

表 2 某单跨两层刚架结构的计算参数及其统计特性

Tab. 2 Statistical properties of some 1-span 2-story plain frame structure

| 符号/单位 | $M_1/\text{kN}\cdot\text{m}$ | $M_2/\text{kN}\cdot\text{m}$ | $F_1/\text{kN}$ | $F_2/\text{kN}$ | $P/\text{kN}$ | $l_1/\text{m}$ | $l_2/\text{m}$ |
|-------|------------------------------|------------------------------|-----------------|-----------------|---------------|----------------|----------------|
| 均 值   | 113.76                       | 271.65                       | 89.18           | 178.36          | 15.582        | 3.66           | 6.10           |
| 变异系数  | 0.144                        | 0.15                         | 0.25            | 0.15            | 0.25          | ---            | ---            |
| 方 差   | 16.38144                     | 40.7475                      | 22.295          | 26.754          | 3.8955        | ---            | ---            |
| 分布类型  | 正态                           | 正态                           | 正态              | 正态              | 正态            | ---            | ---            |

表 3 随机变量独立时该刚架结构的失效概率计算结果

Tab. 3 Failure probability of the frame structure when random variables are dependent

| 计算方法          | 模式(1)                   | 模式(2)                   | 模式(3)                   | 模式(4)                   | 模式(5)                   | 模式(6)                   | 模式(7)                   | 模式(8)                   |
|---------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 可靠性指标 $\beta$ | 2.9768                  | 3.2441                  | 3.3326                  | 3.4254                  | 3.6287                  | 3.7096                  | 3.7125                  | 3.8111                  |
| JC<br>法       | 笔者计算                    | $1.4562 \times 10^{-3}$ | $5.8921 \times 10^{-4}$ | $4.3021 \times 10^{-4}$ | $3.0700 \times 10^{-4}$ | $1.4241 \times 10^{-4}$ | $1.0380 \times 10^{-4}$ | $1.0263 \times 10^{-4}$ |
|               | 文献[5]                   | $1.44 \times 10^{-3}$   | $5.92 \times 10^{-4}$   | $4.30 \times 10^{-4}$   | $3.04 \times 10^{-4}$   | $1.48 \times 10^{-4}$   | $1.05 \times 10^{-4}$   | $1.02 \times 10^{-4}$   |
| 方向概率法         | $1.4528 \times 10^{-3}$ | $5.8619 \times 10^{-4}$ | $4.3088 \times 10^{-4}$ | $3.0896 \times 10^{-4}$ | $1.4212 \times 10^{-4}$ | $1.0204 \times 10^{-4}$ | $1.0306 \times 10^{-4}$ | $6.9621 \times 10^{-5}$ |

本刚架结构的系统失效概率

| 计算方法比较                        | 系统失效概率估计下限                            | 系统失效概率估计上限                        |
|-------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| 最大界限估计                        | $P_f^{(L)} = 1.44 \times 10^{-3}$     | $P_f^{(U)} = 3.19 \times 10^{-3}$ |
| Ditlevson界限估计 <sup>[5]</sup>  | $P_f^{(L)} = 2.01 \times 10^{-3}$     | $P_f^{(U)} = 2.26 \times 10^{-3}$ |
| 概率网络估算技术(PNET) <sup>[5]</sup> | 系统失效概率: $P_f = 2.18 \times 10^{-3}$   |                                   |
| 方向概率法                         | 系统失效概率: $P_f = 2.0558 \times 10^{-3}$ |                                   |

表 4 随机变量互为相关时该刚架结构的失效概率计算结果

Tab. 4 Failure probability of the frame structure when random variables are corrected

| 计算方法          | 模式(1)                   | 模式(2)                   | 模式(3)                   | 模式(4)                   | 模式(5)                   | 模式(6)                   | 模式(7)                   | 模式(8)                   |
|---------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 可靠性指标 $\beta$ | 2.9768                  | 2.6070                  | 2.7299                  | 3.0002                  | 3.6287                  | 2.9918                  | 3.0409                  | 3.1709                  |
| JC<br>法       | 笔者计算                    | $1.4562 \times 10^{-3}$ | $4.5663 \times 10^{-3}$ | $3.1681 \times 10^{-3}$ | $1.3491 \times 10^{-3}$ | $1.4241 \times 10^{-4}$ | $1.3868 \times 10^{-3}$ | $1.1793 \times 10^{-3}$ |
|               | 文献[5]                   | $1.44 \times 10^{-3}$   | $4.59 \times 10^{-3}$   | $3.18 \times 10^{-3}$   | $1.34 \times 10^{-3}$   | $1.48 \times 10^{-4}$   | $1.40 \times 10^{-3}$   | $1.18 \times 10^{-3}$   |
| 方向概率法         | $1.4642 \times 10^{-3}$ | $4.5549 \times 10^{-3}$ | $3.1593 \times 10^{-3}$ | $1.3397 \times 10^{-3}$ | $1.4179 \times 10^{-4}$ | $1.3759 \times 10^{-3}$ | $1.1780 \times 10^{-3}$ | $7.5861 \times 10^{-4}$ |

本刚架结构的系统失效概率

续表 4

| 计算方法比较                       | 系统失效概率估计下限                            | 系统失效概率估计上限                         |
|------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| 最大界限估计                       | $P_f^{(L)} = 4.59 \times 10^{-3}$     | $P_f^{(U)} = 14.10 \times 10^{-3}$ |
| Ditlevson界限估计 <sup>[5]</sup> | $P_f^{(L)} = 4.92 \times 10^{-3}$     | $P_f^{(U)} = 5.25 \times 10^{-3}$  |
| 方向概率法                        | 系统失效概率: $P_f = 5.2062 \times 10^{-3}$ |                                    |

### 3 方向概率法在潜艇结构可靠性计算中的实现

这里考虑潜艇的两类主要承压结构:耐压圆柱壳结构、耐压液舱结构。前者为潜艇耐压艇体的主要结构,后者为潜艇的浮力调节水舱和快潜水舱结构。这两类结构的主要失效形式为局部屈服和失稳。以下将分别按这两种失效形式对两种结构的可靠性问题予以讨论。

#### 3.1 耐压圆柱壳结构

以现行潜艇设计规范《GJB》<sup>[3]</sup>给出的耐压圆柱壳结构的 5 种强度稳定性校合公式作为失效模式极限状态函数,即:(1) 相邻肋骨跨中中面周向应力达到屈服:  $G_1 = \sigma_\theta - \sigma_\theta^0/0.85 < 0$ ; (2) 肋骨跨段壳板内表面纵向应力达到屈服:  $G_2 = \sigma_z - \sigma_z^0/1.15 < 0$ ; (3) 肋骨强度不足:  $G_3 = \sigma_r - \sigma_r^0/0.6 < 0$ ; (4) 相邻肋骨间壳板失稳:  $G_4 = X_m \cdot P_{cr} - P_c < 0$ ; (5) 舱段总体失稳  $G_5 = X_m' \cdot P_{cr}' - P_c < 0$ 。式中  $\sigma_\theta^0$ ,  $\sigma_z^0$ ,  $\sigma_r$ ,  $P_{cr}$ ,  $P_{cr}'$  分别为跨中中面周向应力,壳板跨段内表面纵向应力,肋骨应力,相邻肋骨间壳板计算失稳压力,舱段总体计算失稳压力,具体计算参考文献[3];  $X_m$ ,  $X_m'$  为考虑了计算模型修正系数;其它符号见表 1。

以方向概率法计算潜艇结构系统失效概率时,变量维数应为各失效模式的变量和。但考虑到高维空间单位球面均布点的生成较为耗时,故应将变量维数尽可能地降低。这里可以利用随机变量的敏度分析,舍去不重要的随机变量,即将之当作常量处理。事实上,实践中某些变量的变异系数很小(如外型尺寸  $R$ ,  $L$  的加工精度总能得到保证),因而其对失效概率的贡献也微乎其微。耐压圆柱壳结构的基本变量及其随机特性见表 1。

#### 3.2 耐压液舱结构

这里讨论无纵骨加强的实肋板式耐压液舱结构。根据新规范采用的朱邦俊方法<sup>[4]</sup>,结构的失效模式分别为:模式(1):实肋板根部液舱壳板内表面纵向应力达到屈服;模式(2):相邻实肋板跨中液舱壳板中面周向应力达到屈服;模式(3):液舱区实肋板根部船体壳板外表面纵向应力达到屈服;模式(4):液舱区相邻实肋板跨中船体壳板内表面纵向应力达到屈服;模式(5):液舱壳板失稳;模式(6):液舱区耐压船体壳板失稳。各失效函数的计算见文献[4],基本变量及其随机特性见表 5。

#### 3.3 两种耐压结构的可靠性计算实例

表 5, 表 6, 表 7, 表 8 为某艇的耐压圆柱壳结构的计算参数及其在不同下潜深度时的失效概率计算结果,表中各失效模式对应 3.1 节所述。计算中随机变量的维数取  $n = 6$ , 球面等份数取  $N = 1280$ 。从该结果可以看出:各强度失效模式之间的相关性和各失稳模式之间的相关性很大。而结构的系统失效概率界于最大单个模式失效概率和所有模式失效概率总和之间,这符合串联系统失效概率的计算理论。

表 9, 表 10, 表 11, 表 12 为某艇耐压液舱结构比例模型的计算参数及其在不同水深时的失效概率计算结果,表中各失效模式对应 3.2 节所述。这里随机变量的维数取  $n = 6$ , 球面等份数取  $N = 1280$ 。计算结果表明:耐压液舱结构系统失效主要源于强度失效,失稳的可能性很小,这与其结构形式有较大纵向刚度

有关。作为比较各表中同时给出了 JC 法的计算结果。

表 5 某艇耐压圆柱壳结构的计算参数及其随机特性

Tab.5 Variables and random properties of some cylindrical hull

| 符号/单位        | $l/\text{mm}$ | $R/\text{mm}$ | $t/\text{mm}$ | $A/\text{mm}^2$ | $I_0/\text{mm}^4$ | $Y_0/\text{mm}$ | $E/\text{MPa}$  | $\sigma_s/\text{MPa}$ | $L/\text{mm}$ | $P/\text{MPa}$ | $X_m/(X'_m)$ |
|--------------|---------------|---------------|---------------|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------------|---------------|----------------|--------------|
| 均值 $\mu$     | 600           | 3200          | 24            | 4382            | $3.265\text{e}^7$ | 166             | $2.0\text{e}^5$ | 650.0                 | 7600          | 0.98/100m      | 1.0          |
| 均方差 $\sigma$ | 0.0           | 0.0           | 0.252         | 4.382           | 0.0               | 0.0             | $6.0\text{e}^3$ | 43.03                 | 0.0           | 0.0098         | 0.07         |
| 分布类型         | ---           | ---           | 正态            | 正态              | ---               | ---             | 对数正态            | 正态                    | ---           | 极值I型           | 正态           |

表中符号:  $l$ ——肋骨间距;  $R$ ——壳体半径;  $t$ ——壳板厚度;  $A$ ——肋骨剖面积;  $I_0$ ——肋骨剖面惯性矩;  $Y_0$ ——肋骨截面形心坐标;

$E$ ——弹性模量;  $\sigma_s$ ——屈服极限;  $L$ ——舱段总长;  $P$ ——计算水压力;  $X_m, X'_m$ ——计算模型修正系数。

表 6 下潜 300 米时该圆柱壳结构的失效概率( $P_\mu = 3.0 \times 0.98\text{MPa}$ )

Tab.6 Failure probabilities of the cylindrical hull when diving to the depth of 300m ( $P_\mu = 3.0 \times 0.98\text{MPa}$ )

| 计算方法           | 失效模式(1)                         | 失效模式(2)                   | 失效模式(3)                  | 失效模式(4)                  | 失效模式(5)                    |
|----------------|---------------------------------|---------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------|
| JC法计算的 $\beta$ | 5.7307                          | 7.5793                    | 5.9216                   | 4.7389                   | 6.2178                     |
| JC法            | $5.00054 \times 10^{-9}$        | $1.74703 \times 10^{-14}$ | $1.59394 \times 10^{-9}$ | $1.07455 \times 10^{-6}$ | $2.521130 \times 10^{-10}$ |
| 方向概率法          | $5.65945 \times 10^{-9}$        | $1.68023 \times 10^{-14}$ | $1.77946 \times 10^{-9}$ | $1.48408 \times 10^{-6}$ | $2.11151 \times 10^{-10}$  |
|                | 总强度失效概率: (1), (2), (3)          |                           |                          | 总稳定性失效概率: (4), (5)       |                            |
| 方向概率法          | $5.65946 \times 10^{-9}$        |                           |                          | $1.48408 \times 10^{-6}$ |                            |
|                | 系统失效概率: (1), (2), (3), (4), (5) |                           |                          | 各模式失效概率之和( $\sum P_j$ )  |                            |
| 方向概率法          | $1.48817 \times 10^{-6}$        |                           |                          | $1.49191 \times 10^{-6}$ |                            |

表 7 下潜 350 米时该圆柱壳结构的失效概率( $P_\mu = 3.5 \times 0.98\text{MPa}$ )

Tab.7 Failure probabilities of the cylindrical hull when diving to the depth of 350m ( $P_\mu = 3.5 \times 0.98\text{MPa}$ )

| 计算方法           | 失效模式(1)                         | 失效模式(2)                   | 失效模式(3)                  | 失效模式(4)                   | 失效模式(5)                  |
|----------------|---------------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|
| JC法计算的 $\beta$ | 4.1537                          | 6.2525                    | 4.4194                   | 3.3764                    | 4.9780                   |
| JC法            | $1.63558 \times 10^{-5}$        | $2.01922 \times 10^{-10}$ | $4.94763 \times 10^{-6}$ | $3.761944 \times 10^{-4}$ | $3.21296 \times 10^{-7}$ |
| 方向概率法          | $1.82926 \times 10^{-5}$        | $2.32182 \times 10^{-10}$ | $5.50416 \times 10^{-6}$ | $4.620362 \times 10^{-4}$ | $3.56696 \times 10^{-7}$ |
|                | 总强度失效概率: (1), (2), (3)          |                           |                          | 总稳定性失效概率: (4), (5)        |                          |
| 方向概率法          | $1.82926 \times 10^{-5}$        |                           |                          | $4.620367 \times 10^{-4}$ |                          |
|                | 系统失效概率: (1), (2), (3), (4), (5) |                           |                          | 各模式失效概率之和( $\sum P_j$ )   |                          |
| 方向概率法          | $4.74308 \times 10^{-4}$        |                           |                          | $4.86189 \times 10^{-4}$  |                          |

表8 下潜400米时该圆柱壳结构的失效概率( $P_\mu = 4.0 \times 0.98\text{MPa}$ )Tab.8 Failure probabilities of the cylindrical hull when diving to the depth of 400m ( $P_\mu = 4.0 \times 0.98\text{MPa}$ )

| 计算方法           | 失效模式(1)                    | 失效模式(2)                  | 失效模式(3)                  | 失效模式(4)                   | 失效模式(5)                  |
|----------------|----------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|
| JC法计算的 $\beta$ | 2.5782                     | 4.9105                   | 2.9298                   | 2.0856                    | 3.8174                   |
| JC法            | $4.96604 \times 10^{-3}$   | $4.54242 \times 10^{-7}$ | $1.69568 \times 10^{-3}$ | $1.850830 \times 10^{-2}$ | $6.74342 \times 10^{-5}$ |
| 方向概率法          | $5.37678 \times 10^{-3}$   | $5.21563 \times 10^{-7}$ | $1.83416 \times 10^{-3}$ | $2.144867 \times 10^{-2}$ | $7.61144 \times 10^{-5}$ |
|                | 总强度失效概率:(1),(2),(3)        |                          |                          | 总稳定性失效概率:(4),(5)          |                          |
| 方向概率法          | $5.37678 \times 10^{-3}$   |                          |                          | $2.144869 \times 10^{-2}$ |                          |
|                | 系统失效概率:(1),(2),(3),(4),(5) |                          |                          | 各模式失效概率之和( $\sum P_j$ )   |                          |
| 方向概率法          | $2.46293 \times 10^{-2}$   |                          |                          | $2.87363 \times 10^{-2}$  |                          |

表9 耐压液舱结构可靠性计算的基本随机变量特性

Tab.9 Variables and random properties of some pressure tank model

| 符号/单位       | $R/\text{mm}$ | $t/\text{mm}$ | $R_1/\text{mm}$ | $t_1/\text{mm}$ | $L/\text{mm}$ | $t_2/\text{mm}$ | $E/\text{MPa}$  | $\sigma_s/\text{MPa}$ | $P_c/\text{MPa}$ | $X_m$ |
|-------------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------------|------------------|-------|
| 均值 $\mu$    | 1125.0        | 9.0           | 1350.0          | 8.0             | 162.5         | 5.0             | $2.0\text{e}^5$ | 650.0                 | 0.98/100m        | 1.00  |
| 方差 $\sigma$ | 0.0           | 0.0945        | 0.0             | 0.084           | 0.0           | 0.0             | $6.0\text{e}^3$ | 43.03                 | 0.98/100m        | 0.070 |
| 分布类型        | ---           | 正态            | ---             | 正态              | ---           | ---             | 对数正态            | 正态                    | 极值I型             | 正态    |

符号:  $R$ ——液舱区域耐压船体半径;  $t$ ——耐压船体壳板厚度;  $R_1$ ——液舱半径;  $t_1$ ——液舱壳板厚度;  $L$ ——实肋板间距;  $t_2$ ——实肋板厚度;  $E$ ——弹性模量;  $\sigma_s$ ——屈服极限;  $P_c$ ——计算水压力;  $X_m$ ——模型修正系数。

表10 水下300米深度该耐压液舱模型的失效概率

Tab.10 Failure probabilities of the tank model at the depth of 300m under water

| 计算方法           | 失效模式(1)                        | 失效模式(2)                   | 失效模式(3)                  | 失效模式(4)                   | 失效模式(5)                   | 失效模式(6)                   |
|----------------|--------------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| JC法计算的 $\beta$ | 6.0086                         | 9.9889                    | 5.4409                   | 6.8699                    | 8.3781                    | 10.2767                   |
| JC法            | $9.35404 \times 10^{-10}$      | $8.52268 \times 10^{-24}$ | $2.65009 \times 10^{-8}$ | $3.21163 \times 10^{-12}$ | $2.68863 \times 10^{-17}$ | $4.48804 \times 10^{-25}$ |
| 方向概率法          | $1.25521 \times 10^{-9}$       | 0.00000                   | $2.92822 \times 10^{-8}$ | $3.06171 \times 10^{-12}$ | 0.00000                   | 0.00000                   |
|                | 总强度失效概率:(1),(2),(3),(4)        |                           |                          |                           | 总稳定性失效概率:(5),(6)          |                           |
| 方向概率法          | $2.92910 \times 10^{-8}$       |                           |                          |                           | 0.00000                   |                           |
|                | 系统失效概率:(1),(2),(3),(4),(5),(6) |                           |                          |                           | 各模式失效概率之和( $\sum P_j$ )   |                           |
| 方向概率法          | $2.92910 \times 10^{-8}$       |                           |                          |                           | $3.05405 \times 10^{-8}$  |                           |



表 11 水下 350 米深度该耐压液舱模型的失效概率

Tab.11 Failure probabilities of the tank model at the depth of 350m under water

| 计算方法           | 失效模式(1)                        | 失效模式(2)                      | 失效模式(3)                     | 失效模式(4)                     | 失效模式(5)                      | 失效模式(6)                      |
|----------------|--------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| JC法计算的 $\beta$ | 4.4952                         | 9.1249                       | 3.7806                      | 5.4311                      | 7.3946                       | 9.5527                       |
| JC法            | 3.47582<br>$\times 10^{-6}$    | 3.59124<br>$\times 10^{-20}$ | 7.82268<br>$\times 10^{-5}$ | 2.79963<br>$\times 10^{-8}$ | 7.09077<br>$\times 10^{-14}$ | 6.32005<br>$\times 10^{-22}$ |
| 方向概率法          | 4.00989<br>$\times 10^{-6}$    | 0.00000                      | 8.74112<br>$\times 10^{-5}$ | 3.11262<br>$\times 10^{-8}$ | 2.14320<br>$\times 10^{-14}$ | 0.00000                      |
|                | 总强度失效概率:(1),(2),(3),(4)        |                              |                             |                             | 总稳定性失效概率:(5),(6)             |                              |
| 方向概率法          | $8.74555 \times 10^{-5}$       |                              |                             |                             | $2.14320 \times 10^{-14}$    |                              |
|                | 系统失效概率:(1),(2),(3),(4),(5),(6) |                              |                             |                             | 各模式失效概率之和( $\sum P_j$ )      |                              |
| 方向概率法          | $8.74555 \times 10^{-5}$       |                              |                             |                             | $9.14522 \times 10^{-5}$     |                              |

表 12 水下 400 米深度该耐压液舱模型的失效概率

Tab.12 Failure probabilities of the tank model at the depth of 400m under water

| 计算方法           | 失效模式(1)                        | 失效模式(2)                      | 失效模式(3)                     | 失效模式(4)                     | 失效模式(5)                      | 失效模式(6)                      |
|----------------|--------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| JC法计算的 $\beta$ | 2.9973                         | 8.2588                       | 2.1154                      | 3.9785                      | 6.4727                       | 8.8485                       |
| JC法            | 1.36184<br>$\times 10^{-3}$    | 7.35881<br>$\times 10^{-17}$ | 1.71970<br>$\times 10^{-2}$ | 3.46741<br>$\times 10^{-5}$ | 4.81206<br>$\times 10^{-11}$ | 4.43622<br>$\times 10^{-19}$ |
| 方向概率法          | 1.48649<br>$\times 10^{-3}$    | 0.0000                       | 1.84815<br>$\times 10^{-2}$ | 3.91179<br>$\times 10^{-5}$ | 6.24746<br>$\times 10^{-11}$ | 0.00000                      |
|                | 总强度失效概率:(1),(2),(3),(4)        |                              |                             |                             | 总稳定性失效概率:(5),(6)             |                              |
| 方向概率法          | $1.848332 \times 10^{-2}$      |                              |                             |                             | $6.24746 \times 10^{-11}$    |                              |
|                | 系统失效概率:(1),(2),(3),(4),(5),(6) |                              |                             |                             | 各模式失效概率之和( $\sum P_j$ )      |                              |
| 方向概率法          | $1.848332 \times 10^{-2}$      |                              |                             |                             | $2.00071 \times 10^{-2}$     |                              |

## 4 结 语

本文通过随机空间的映射变换,将一般非正态分布的相关随机变量的结构可靠性问题转化到 Gauss 空间中加以讨论,并利用该空间的概率分布特性将问题大大简化,解决了潜艇两类主要耐压结构多模式串联结构系统失效概率的计算问题。该计算方法较为完备,且有普遍性,能运用于多数类似问题的处理,尤其适用于失效面方程高度非线性的可靠性计算问题。变换过程建立在数学的基础之上,较少采用近似计算,有利于提高计算精度。根据笔者的实践,若不将 Gauss 空间球面等份的工作量包含在结构失效概率的计算中,在普通 PC 机上计算潜艇这样较复杂的结构系统失效概率也只需 10 秒左右时间,比起 Monte - Carlo 法等数值模拟法的效率大大提高,且无须产生随机样本,计算结果稳定。高维球面均布点的生成虽较为耗时,但同维随机变量的可靠性计算问题可采用相同的球面均布点,也即生成的各维球面均布点坐标可重复使用。对于今后该方法的完善,重点似乎应放在高维球面均布点快速生成的算法上。本文初步解决了潜艇结构可靠性计算中可能遇到的两大困难,即:变量相

关和模式相关的问题。该分析方法可为建立在可靠性基础上的潜艇设计原则提供一定的量化参考或对已设计的潜艇结构作系统可靠性校合,使其满足设计下潜深度时的可靠性要求。

### 参 考 文 献:

- [1] Nie Jinsuo, Ellingwood B R. Directional methods for structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 2000, 22.
- [2] 李云贵, 赵国藩. 广义随机空间内的一次可靠度分析方法[J]. 大连理工大学学报, 1993, 33(S. 1).
- [3] GJB/Z21-91. 潜艇结构设计计算规则[M]. 国防科学技术工业委员会批发, 1992-06-01 实施.
- [4] 朱邦俊等. 实肋板式耐压液舱结构计算方法研究[J]. 中国造船, 2000(1).
- [5] 胡云昌等. 结构系统可靠性分析原理及应用[M]. 天津: 天津大学出版社, 1992.

## Reliability Analysis of Submarine Structures Based on Directional Method

WU Ya - ge<sup>1</sup>, WU Jian - guo<sup>2</sup>

(1 Building Engineering Department, Civil Engineering College of Tongji University; Shanghai 200000, China;

2 East China Ship Building Institute, Zhenjiang 212003, China)

**Abstract:** The reliability analysis of submarine structures should be classified as series - system reliability problem with related failure modes. In this paper, all the failure surfaces are transferred into Gaussian Space by transformation of random variable space, and thus the properties of chi - square - distribution in Gaussian Space can be utilized to calculate the failure probability in the total failure area. Because there is no need to determine the correlation of failure modes approximately, the precision of analysis can be raised. Examples for two types of submarine structures indicate that this method is practical and useful, and is especially suitable for reliability analysis with highly non - linear failure surfaces.

**Key words:** structural reliability; failure modes; series system; parallel system; cylindrical hull; tank

**E - mail:** hwyg@pub.zj.jsinfo.net