

2006 年全国硕士研究生入学统一考试

理工数学一试题详解及评析

一、填空题

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \text{微分方程 } y' = \frac{y(1-x)}{x} \text{ 的通解是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) \text{设 } \Sigma \text{ 是锥面 } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (} 0 \leq z \leq 1 \text{) 的下侧, 则 } \iint_{\Sigma} x dy dz + 2 y dz dx + 3(z-1) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) \text{点 } (2, 1, 0) \text{ 到平面 } 3x + 4y + 5z = 0 \text{ 的距离 } z = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(5) \text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, E \text{ 为 } 2 \text{ 阶单位矩阵, 矩阵 } B \text{ 满足 } BA = B + 2E, \text{ 则 } |B| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(6) \text{设随机变量 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立, 且均服从区间 } [0, 3] \text{ 上的均匀分布, 则 } P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、选择题

$$(7) \text{设函数 } y = f(x) \text{ 具有二阶导数, 且 } f'(x) > 0, f''(x) > 0, \Delta x \text{ 为自变量 } x \text{ 在 } x_0 \text{ 处的增量, } \Delta y \text{ 与 } dy \text{ 分别为 } f(x) \text{ 在点 } x_0 \text{ 处对应的增量与微分, 若 } \Delta x > 0, \text{ 则}$$

$$(A) 0 < dx < \Delta y. \quad (B) 0 < \Delta y < dy.$$

$$(C) \Delta y < dy < 0. \quad (D) dy < \Delta y < 0.$$

【 】

$$(8) \text{设 } f(x, y) \text{ 为连续函数, 则 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \text{ 等于}$$

$$(A) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$(B) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$(C) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(C) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

【 】

$$(9) \text{若级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛, 则级数}$$

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ 收敛.}$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ 收敛.}$$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛. 【 】

(10) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 【 】

(11) 设 a_1, a_2, \dots, a 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

(A) 若 a_1, a_2, \dots, a 线性相关, 则 Aa_1, Aa_2, \dots, Aa 线性相关.

(B) 若 a_1, a_2, \dots, a 线性相关, 则 Aa_1, Aa_2, \dots, Aa 线性无关.

(C) 若 a_1, a_2, \dots, a 线性无关, 则 Aa_1, Aa_2, \dots, Aa 线性相关.

(D) 若 a_1, a_2, \dots, a 线性无关, 则 Aa_1, Aa_2, \dots, Aa 线性无关. 【 】

(12) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2

列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

(A) $C = P^{-1}AP$.

(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^T AP$.

(D) $C = PAP^T$. 【 】

(13) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有

(A) $P(A \cup B) > P(A)$.

(B) $P(A \cup B) > P(B)$.

(C) $P(A \cup B) = P(A)$.

(D) $P(A \cup B) = P(B)$. 【 】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且

$$P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\},$$

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$.

(B) $\sigma_1 > \sigma_2$.

(C) $\mu_1 < \mu_2$.

(D) $\mu_1 > \mu_2$.

【 】

三 解答题

15 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

16 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \dots)$.

求: (I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求之.

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

17 将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

18 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$.

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

19 设在上半平面 $D = \{(x, y) | y > 0\}$ 内, 数 $f(x, y)$ 是有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y).$$

证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有 $\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$.

20 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 - bx_4 = 1 \end{cases}$$
 有3个线性无关的解

I 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$

II 求 a, b 的值及方程组的通解

21 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线

性方程组 $Ax=0$ 的两个解, (I)求 A 的特征值与特征向量 (II)求正交矩阵 Q 和对角矩阵 A ,使得 $Q^T A Q = A$.

22 随机变量 x 的概率密度为 $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 令 $y = x^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量

(X, Y) 的分布函数.

(I)求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$

(II) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

23 设总体 X 的概率密度为 $F(X, 0) = \begin{cases} \theta & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数 $(0 < \theta < 1)$,

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

2006 年全国硕士研究生入学考试数学一真题解析

一、填空题

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \underline{2}.$$

$$\ominus \ln(1+x)x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时})$$

$$(2) \text{微分方程 } y' = \frac{y(1-x)}{x} \text{ 的通解是 } \underline{y = cxe^{-x} (x \neq 0)}, \text{ 这是变量可分离方程.}$$

$$(3) \text{设 } \Sigma \text{ 是锥面 } Z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq Z \leq 1) \text{ 的下侧, 则}$$

$$\iint_{\Sigma} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = \underline{2\pi}$$

$$\text{补一个曲面 } \Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ 上侧}$$

$$P = x, \quad Q = 2y, \quad R = 3(z-1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \iint_{\Sigma} + \iint_{\Sigma_1} &= \iiint_{\Omega} 6dxdydz \quad (\Omega \text{ 为锥面 } \Sigma \text{ 和平面 } \Sigma_1 \text{ 所围区域}) \\ &= 6V \quad (V \text{ 为上述圆锥体体积}) \\ &= 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi \end{aligned}$$

$$\text{而 } \iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = 0$$

$$(\because \text{在 } \Sigma_1 \text{ 上: } z=1, dz=0)$$

$$(4) \text{点 } (2, 1, 0) \text{ 到平面 } 3x + 4y + 5z = 0 \text{ 的距离 } d = \underline{\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{10}{\sqrt{50}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}}$$

$$(5) \text{设 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 2 \text{ 阶矩阵 } B \text{ 满足 } BA = B + 2E, \text{ 则 } |B| = \underline{\quad}.$$

解: 由 $BA = B + 2E$ 化得 $B(A - E) = 2E$, 两边取行列式, 得

$$|B| |A - E| = |2E| = 4,$$

计算出 $|A - E| = 2$, 因此 $|B| = 2$.

$$(6) \underline{\frac{1}{9}}$$

二、选择题

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分. 若 $\Delta x > 0$, 则 [A]

(A) $0 < dy < \Delta y$ (B) $0 < \Delta y < dy$ (C) $\Delta y < dy < 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$

因为 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 严格单调增加

$f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 是凹的

又 $\Delta x > 0$, 故 $0 < dy < \Delta y$

(8) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于 [C]

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

(9) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 [D]

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛 (Q $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 也收敛)

(10) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$

在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 [D]

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

构造格朗日乘子法函数 $F = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 & (1) \\ F'_y = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 & (2) \\ F'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

今 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$, $\therefore \lambda = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$ 代入 (1) 得 $f'_x(x_0, y_0) = \frac{f'_y(x_0, y_0) \varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$

今 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 故选 [D]

(11) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 都是 n 维向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 () 成立.

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

解: (A)

本题考的是线性相关性的判断问题, 可以用定义解.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则存在不全为 0 的数 c_1, c_2, \dots, c_s 使得

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_s \alpha_s = 0,$$

用 A 左乘等式两边, 得

$$c_1 A\alpha_1 + c_2 A\alpha_2 + \cdots + c_s A\alpha_s = 0,$$

于是 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

如果用秩来解, 则更加简单明了. 只要熟悉两个基本性质, 它们是:

1. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$.

2. $r(AB) \leq r(B)$.

矩阵 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 因此

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s).$$

由此马上可判断答案应该为 (A).

(12) 设 A 是 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列上得 B , 将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列上

得 C . 记
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
 则

(A) $C = P^{-1}AP$. (B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = \bar{P}AP$. (D) $C = PAP^{\bar{P}}$.

解: (B)

用初等矩阵在乘法中的作用得出

$$\begin{aligned} B &= PA, \\ C &= B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = BP^{-1} = PAP^{-1}. \end{aligned}$$

(13) 根据乘法公式与加法公式有:

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A)$$

应选 C

(14) 依题: $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1), \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2} \sim N(0, 1).$

$$P\{|X - \mu_1| < 1\} = P\left\{\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right\},$$

$$P\{|Y - \mu_2| < 1\} = P\left\{\left|\frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right| < \frac{1}{\sigma_2}\right\}.$$

因 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\},$

$$\text{即 } P\left\{\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right\} > P\left\{\left|\frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right| < \frac{1}{\sigma_2}\right\}.$$

所以 $\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}, \sigma_1 < \sigma_2.$

应选 A

三、解答题

(15) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$

解: $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0$

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

(16) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \dots)$

求 (1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求之

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

解: (1) $0 < x_2 = \sin x_1 < x_1$, 因此当 $n \geq 2$ 时

$x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, $\{x_n\}$ 单调减少

又 $x_n \geq 0$, $\therefore \{x_n\}$ 有下界, 根据准则1, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 存在, 递推公式两边取极限得

$$A = \sin A, \therefore A = 0$$

(2) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$, 为“ 1^∞ ”型

Q 离散型不能直接用洛必达法则

先考虑 $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{\sin t}{t} \right)}$

$$= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \ln \frac{\sin t}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \ln \left(\frac{t \cos t - \sin t}{t^2} \right)} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t - \sin t}{2t^3}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \left[1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right] - \left[t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \right]}{2t^3}} = e^{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{12}}$$

(17) 将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数

解: $f(x) = \frac{x}{(2-x)(1+x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{1+x}$

$$A(1+x) + B(2-x) = x \quad \text{令 } x=2, \quad 3A=2, \quad A=\frac{2}{3}$$

$$\text{令 } x=-1, \quad 3B=-1, \quad B=-\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{(2-x)} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1+x)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{[1-(-x)]}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2^n} + (-1)^{n+1} \right] x^n, \quad |x| < 1$$

(18) 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $Z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$ 求函数 $f(u)$ 的表达式

证: (I) $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{\partial z}{\partial y} = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x^2}{(x^2 + y^2)} + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(x^2 + y^2)} \\ &= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x^2}{(x^2 + y^2)} + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

同理 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)} + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 得 $f''(\sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{f'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

$\therefore f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ 成立

(II) 令 $f'(u) = p$, 则 $\frac{dp}{du} = -\frac{p}{u}; \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{du}{u} + c$

$\ln|p| = -\ln|u| + c, \therefore f'(u) = p = \frac{c}{u}$

Q $f'(1) = 1, c = 1, f(u) = \ln|u| + c_2$, 由 $f(1) = 0$, 得 $c_2 = 0$ 于是 $f(u) = \ln|u|$

(19) 设在上半平面 $D = \{(x, y) | y > 0\}$ 内, 函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且对任意 $t > 0$

都有 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$

证明: 对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L ,

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0.$$

证: 把 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$ 两边对 t 求导

$$\text{得: } xf'_x(tx, ty) + yf'_y(tx, ty) = -2tf(x, y)$$

$$\text{令 } t=1, \text{ 则 } xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y)$$

$$\text{再令 } P = yf(x, y), \quad Q = -xf(x, y)$$

所给曲线积分等于 0 的充分必要条件为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\text{今 } \frac{\partial Q}{\partial x} = -f(x, y) - xf'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y) + yf'_y(x, y)$$

$$\text{要求 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ 成立, 只要 } xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y)$$

我们已经证明, $\therefore \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 于是结论成立.

(20) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

① 证明此方程组的系数矩阵 A 的秩为 2.

② 求 a, b 的值和方程组的通解.

解: ① 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组的 3 个线性无关的解, 则 $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$ 是 $AX=0$ 的两个线性无关的解. 于是 $AX=0$ 的基础解系中解的个数不少于 2, 即 $4 - r(A) \geq 2$, 从而 $r(A) \leq 2$.

又因为 A 的行向量是两两线性无关的, 所以 $r(A) \geq 2$.

两个不等式说明 $r(A)=2$.

② 对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$(A|\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a \end{pmatrix},$$

由 $r(A)=2$, 得出 $a=2, b=-3$. 代入后继续作初等行变换:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 4x_4, \\ x_2 = -3 + x_3 - 5x_4, \end{cases}$$

求出一个特解 $(2, -3, 0, 0)^T$ 和 $AX=0$ 的基础解系 $(-2, 1, 1, 0)^T, (4, -5, 0, 1)^T$. 得到方程组的通解:

$$(2, -3, 0, 0)^T + c_1(-2, 1, 1, 0)^T + c_2(4, -5, 0, 1)^T, \quad c_1, c_2 \text{ 任意}.$$

(21) 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.

① 求 A 的特征值和特征向量.

② 求作正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得

$$Q^T A Q = \Lambda.$$

解: ① 条件说明 $A(1, 1, 1)^T = (3, 3, 3)^T$, 即 $\alpha_0 = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的特征向量, 特征值为 3. 又 α_1, α_2 都是 $AX=0$ 的解说明它们也都是 A 的特征向量, 特征值为 0. 由于 α_1, α_2 线性无关, 特征值 0 的重数大于 1. 于是 A 的特征值为 3, 0, 0.

属于 3 的特征向量: $c\alpha_0, c \neq 0$.

属于 0 的特征向量: $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2, c_1, c_2$ 不都为 0.

② 将 α_0 单位化, 得 $\eta_0 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

对 α_1, α_2 作施密特正交化, 的 $\eta_1 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T, \eta_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})^T$.

作 $Q = (\eta_0, \eta_1, \eta_2)$, 则 Q 是正交矩阵, 并且

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(22) \text{ 随机变量 } X \text{ 的概率密度为 } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \text{ , 令 } Y = X^2, \text{ } F(x, y) \text{ 为二维随}$$

机变量 (X, Y) 的分布函数.

$$(I) \text{ 求 } Y \text{ 的概率密度; } (II) F(-\frac{1}{2}, 4)$$

解:

$$(I) F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ (1) \text{式}, & 0 \leq y < 1 \\ (2) \text{式}, & 1 \leq y < 4 \\ 1, & 4 \leq y \end{cases}$$

$$(1) \text{式} = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4} \sqrt{y};$$

$$(2) \text{式} = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{y}.$$

$$\text{所以: } f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这个解法是从分布函数的最基本的概率定义入手, 对 y 进行适当的讨论即可, 在新东方的辅导班里我也经常讲到, 是基本题型.

(II)

$$F(-\frac{1}{2}, 4)$$

$$= P(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, -2 \leq X \leq 2) = P(-2 \leq X \leq -\frac{1}{2}) \\ = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}.$$

$$(23) \text{ 设总体 } X \text{ 的概率密度为 } f(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \text{ , 其中 } \theta \text{ 是未知参数 } (0 < \theta < 1).$$

$X_1, X_2, \Lambda X_n$ 为来自总体的简单随机样本, 记 N 为样本值 $x_1, x_2, \Lambda x_n$ 中小于 1 的个数. 求 θ

的最大似然估计.

解: 对样本 $x_1, x_2, \Lambda x_n$ 按照 <1 或者 ≥ 1 进行分类: $x_{p1}, x_{p2}, \Lambda x_{pN} < 1$,

$x_{pN+1}, x_{pN+2}, \Lambda x_{pn} \geq 1$.

$$\text{似然函数 } L(\theta) = \begin{cases} \theta^N (1-\theta)^{n-N}, & x_{p1}, x_{p2}, \Lambda x_{pN} < 1, x_{pN+1}, x_{pN+2}, \Lambda x_{pn} \geq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在 $x_{p1}, x_{p2}, \Lambda x_{pN} < 1, x_{pN+1}, x_{pN+2}, \Lambda x_{pn} \geq 1$ 时,

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta),$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta} = 0, \text{ 所以 } \theta_{\text{最大}} = \frac{N}{n}.$$